G2 de Álgebra Linear I – 2013.2

18 de Outubro de 2013.

Gabarito

---

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,2), \\ T(1,1,0) &= (0,1,1), \\ T(1,0,0) &= (1,0,1), \end{aligned}$$

e a transformação linear $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento em relação ao plano que contém a origem e é paralelo aos vetores

$$\{(1,0,-1),(1,0,1)\}.$$

(a) Determine as matrizes $[T]$, $[E]$ e $[E \circ T]$ das transformações lineares T, E e $E \circ T$ na base canônica, respectivamente.

(b) Considere o plano π cuja equação cartesiana é $x = 0$ e o subespaço $\mathbb{V}$ definido como a imagem de π pela transformação linear $E \circ T$, isto é, $\mathbb{V} = E \circ T(\pi)$.

Verifique que

$$G = \{(-1,0,1),(1,2,1),(0,2,2)\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $\mathbb{V}$.

Encontre uma base β de $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto G.

Determine as coordenadas do vetor $(1,4,3) \in \mathbb{V}$ na base β.

(c) Determine, se possível, um vetor $\vec{u}$ tal que $T^{-1}(\vec{u}) = (3,0,0)$. Justifique cuidadosamente.

Lembre que a imagem de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ por uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o subespaço

$$L(\mathbb{W}) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{w} \in \mathbb{W} \text{ tal que } T(\vec{w}) = \vec{u}\}.$$

Resposta:

a) Sabendo que:

$$T(1,1,1) = (0,0,2), \quad T(1,1,0) = (0,1,1), \quad T(1,0,0) = (1,0,1)$$

encontraremos as imagens de T dos vetores da base canônica.

Observe que já temos

$$T(1,0,0) = (1,0,1)$$

Observe que:

$$(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0),$$

portanto,

$$T(0,1,0) = T(1,1,0) - T(1,0,0) = (-1,1,0).$$

Finalmente,

$$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0),$$

portanto,

$$T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (0,-1,1).$$

Assim:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontraremos agora a matriz da transformação linear $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamneto em relação ao plano que contém a origem e é paralelo aos vetores $\{(1,0,-1),(1,0,1)\}$. Observamos que o plano de espelhamento tem equação cartesiana $y = 0$, pois

$$(1,0,-1)\times(1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,0).$$

Observe que os vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ pertencem ao plano de espelhamento, portanto

$$E(1,0,0) = (1,0,0), \quad E(0,0,1) = (0,0,1).$$

Finalmente o vetor normal ao plano é $(0,1,0)$, logo

$$E(0,1,0) = (0,-1,0).$$

Assim,

$$[E]_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos a matriz $[E \circ T]$ da composição $E \circ T$ basta multiplicarmos as matrizes $[E]$ e $[T]$.

$$[E]\,[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Observamos que os vetores $(0,1,0),(0,0,1)$ formam uma base para o plano π de equação cartesiana $x = 0$. Logo o subespaço $\mathbb{V} = E \circ T(\pi)$ estará gerado pelas imagens dos vetores desta base pela transformação $E \circ T$. Usando o item anterior (a matriz $[E \circ T]$) temos

$$E \circ T(0,1,0) = (-1,-1,0), \quad E \circ T(0,0,1) = (0,1,1)$$

Assim o subespaço $\mathbb{V} = E \circ T(\pi)$ é o plano ρ gerado pelos vetores $(-1,-1,0)$ e $(0,1,1)$. O vetor normal do plano é::

$$(-1,-1,0) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1).$$

Assim a equação cartesina do plano ρ é:

$$x - y + z = 0.$$

Para verificar que o conjunto

$$G = \{(-1,0,1), (1,2,1), (0,2,2)\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $\mathbb{V}$ basta verificar que os vetores pertencem ao plano ρ.

$$-1 - 0 + 1 = 0, \quad 1 - 2 + 1 = 0, \quad 0 - 2 + 2 = 0.$$

e que dois deles são linearmente independentes (de fato qualquer par de vetores de G é um conjunto linearmente independente pois estes vetores não são paralelos entre si). Temos portanto que o conjunto G é gerador do subespaço $\mathbb{V}$.

Uma base para o subespaço $\mathbb{V}$ é um conjunto formado por dois vetores linearmente independentes do conjunto G. Temos, por exemplo, as seguintes três bases de $\mathbb{V}$:

$$\beta = \left\{ \Big(-1,0,1 \Big), \Big(0,2,2 \Big) \right\},$$
$$\gamma = \left\{ \Big(-1,0,1 \Big), \Big(1,2,1 \Big) \right\},$$
$$\alpha = \left\{ \Big(1,2,1 \Big), \Big(0,2,2 \Big) \right\}.$$

Escrever o vetor $(1,4,3)$ na base β é resolver o sistema linear:

$$(1,4,3) = x\,(-1,0,1) + y\,(0,2,2).$$

A solução (x,y) são as coordenadas de $(1,4,3)$ na base β.

Temos

$$1 = -x, \quad 4 = 2y, \quad 3 = x + 2y.$$

Logo

$$x = -1, \quad y = 2.$$

c) Como $\det[T] = 2 \neq 0$, existe a transformação linear inversa T^{-1}. Assim:

$$T \circ T^{-1}(\vec{u}) = T(3,0,0), \quad \vec{u} = T(3,0,0), \quad \vec{u} = 3\,T(1,0,0).$$

Portanto,

$$\vec{u} = (3,0,3).$$

---

2) Considere as transformações lineares

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \qquad Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre a forma geral da transformação S, isto é, $S(x,y,z)$.

(b) Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por

- $\mathbb{W} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tais que $S(\vec{w}) = \vec{0}\}$,
- $\mathbb{U} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(\vec{u}) = \vec{0}\}$ e
- $\mathbb{N} = \{\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ tais que $Z(\vec{n}) = \vec{0}\}$.

Determine uma base ortogonal β de $\mathbb{W}$, uma base ortogonal γ de $\mathbb{U}$ e uma base ortogonal η de $\mathbb{N}$.

(c) Decida se a transformação linear S é sobrejetora.

(d) Encontre dois vetores distintos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tais que $S(\vec{u}) = S(\vec{v})$.

(e) Determine a equação paramétrica de um plano π tal que $S(\pi)$ (a imagem de π pela transformação S) seja a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (t, -t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Resposta:

a) Temos a matriz $[S]$, logo para achar a forma geral da tranformção basta fazermos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -x - y + 2z \\ y + z \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, -x - y + 2z, y + z).$$

(b) Para encontrarmos o subespaço $\mathbb{W}$ usamos a $[S]$ na base canônica. Temos que encontrar os vetores $u = (x, y, z)$ que verificam

$$S(x,y,z) = (x + 2y - z, -x - y + 2z, y + z) = (0,0,0).$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0, \\ -x - y + 2z &= 0, \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

Temos $z = -y$ e $x + 3y = 0$. Assim obtemos que os vetores são da forma

$$\vec{u} = (-3t, t, -t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Logo uma base ortogonal β para o subespaço $\mathbb{W}$ pode ser:

$$\beta = \Big\{ \Big(-3, 1, -1 \Big), \Big\}.$$

Para encontrarmos o subespaço $\mathbb{U}$ usamos a matriz de $[T]$. Temos que os vetores $u = (x, y, z)$ tais que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ verificam

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \\ 3x + 3y + 3z \end{pmatrix}.$$

Logo

$$T(x,y,z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 3x + 3y + 3z) = (0,0,0).$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x + 2y + 2z &= 0, \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Temos então que $\mathbb{U}$ é plano $x+y+z=0$. Assim os vetores da forma

$$\vec{n}=(t,s,-t-s), \qquad t,s\in\mathbb{R}$$

pertencem a $\mathbb{U}$. Para achar uma base ortogonal γ do subespaço $\mathbb{U}$ escolhemos um vetor do plano, por exemplo, $(1,-1,0)$, e fazemos seu produto vetorial com o vetor normal do plano $(1,1,1)$,

$$(1,-1,0)\times(1,1,1)=(-1,-1,2).$$

Desta forma obtemos uma base ortogonal de $\mathbb{U}$,

$$\gamma=\Big\{\Big(1,-1,0\Big),\Big(-1,-1,2\Big)\Big\}.$$

Para encontrar o subespaço $\mathbb{N}$ podemos observar que a matriz $[Z]$ representa a transformação linear nula. Logo temos que $\mathbb{R}^3$ é o subespaço procurado. E uma base para η para $\mathbb{N}$ pode ser a base canônica.

$$\eta=\Big\{\Big(1,0,0\Big),\Big(0,1,0\Big),\Big(0,0,1\Big)\Big\}.$$

(c) A imagem de S é gerada pelos vetores $(1,0,1)$, $(2,-1,1)$ e $(-1,2,1)$ (as imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Note que os dois primeiros vetores geram o plano de vetor normal

$$(1,0,1)\times(2,-1,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,1,-1).$$

Isto é

$$x+y-z=0.$$

Este plano contém o vetor $(-1,2,1)$. Logo a imagem de S é um plano e portanto S. Assim conjunto imagem da transformação não é o $\mathbb{R}^3$ logo a transformação não é sobrejetora.

(d) Podemos escolher os vetores $(-3, 1, -1)$ e $(0, 0, 0)$ que verificam:

$$S(-3, 1, -1) = S(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

(e) Precisamos encontrar vetores (x, y, z) tais que

$$S(x, y, z) = (t, -t, 0).$$

Escrevemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtendo o sistema

$$\begin{aligned} &x + 2y - z = t, \\ &-x - y + 2z = -t, \\ &y + z = 0. \end{aligned}$$

Que tem solução:

$$x = t - 3y, \quad z = -y.$$

Logo temos a a equação paramétrica do plano π:

$$(t - 3s, s, -s).$$

---

3) Considere o plano

$$\pi : x + y + z = 1.$$

Determine uma equação cartesiana de um plano ρ tal que a distância entre os planos π e ρ seja $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resposta:

O plano ρ é paralelo ao plano π logo tem equação cartesiana da forma

$$x + y + z = d.$$

Escolhendo o ponto $P = (1, 0, 0)$ do plano π e o ponto $Q = (d, 0, 0)$ do plano ρ calculamos o módulo da projeção ortogonal do vetor PQ no vetor normal dos planos, o vetor $(1, 1, 1)$, O módulo desse vetor é a distância procurada.

$$d(\pi, \rho) = \left\| \left(\frac{(d-1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} \right) (1, 1, 1) \right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim:

$$\left\| (\frac{d-1}{3})(1, 1, 1) \right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}|d-1| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Temos $d - 1 = 1$ ou $d - 1 = -1$. Logo

$$d = 0 \quad \text{ou} \quad d = 2.$$