G2 de Álgebra Linear I – 2013.1

17 de Maio de 2013.

Gabarito

---

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(1,1,0) = (2,2,0),$$
$$T(0,1,1) = (1,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (1,1,0).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine uma base da imagem de T. Lembre que

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

(c) Encontre todos os vetores $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(\vec{u}) = (0,0,0).$$

(d) Decida se a transformação linear T é injetora. Decida se a transformação linear T é sobrejetora. Justifique cuidadosamente.

(e) Considere o triângulo Δ de vértices

$$(1,-1,0), \quad (1,3,4), \quad (1,3,0).$$

Determine se a imagen $T(\Delta)$ de Δ pela transformação T é um triângulo ou um segmento. Se for um triângulo calcule sua área e se for um segmento calcule seu comprimento.

Resposta:

a) Sabendo que:

$$T(1,1,0) = (2,2,0), \quad T(0,1,1) = (1,0,0), \quad T(0,1,0) = (1,1,0)$$

encontraremos as imagens de T dos vetores da base canônica. Observe que

$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,0),$$

portanto,

$$T(1,0,0) = T(1,1,0) - T(0,1,0) = (1,1,0).$$

Lembre que

$$T(0,1,0) = (1,1,0).$$

Finalmente, de

$$(0,0,1) = (0,1,1) - (0,1,0)$$

obtemos

$$T(0,0,1) = T(0,1,1) - T(0,1,0) = (0,-1,0).$$

Assim:

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Observamos que $T(\mathbf{i}) = T(\mathbf{j})$ não é paralelo a $T(\mathbf{k})$, temos que imagem(T) é o plano gerado por $T(\mathbf{i})$ e $T(\mathbf{k})$. Temos que o vetor normal deste plano é

$$T(\mathbf{i}) \times T(\mathbf{k}) = (1,1,0) \times (0,-1,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1).$$

Logo a equação cartesiana deste plano é $z = 0$.

Uma base ortogonal da imagem de T:

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

c) Usando a matriz de T na base canônica temos que os vetores $u = (x, y, x)$ tais que $T(x, y.z) = (0, 0, 0)$ verificam

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y - z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verificam

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y, 0) = (0, 0, 0).$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos $z = 0$ e $x + y = 0$. Assim obtemos os vetores da forma

$$u = (-t, t, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

d) Como existem vetores $\vec{v}$ não nulos tais que $T(\vec{v}) = \vec{0}$ temos que a transformação não é injetora. Observe que para todo vetor $\vec{w}$ se verifica $T(\vec{w} + \vec{v}) = T(\vec{w})$ pois

$$T(\vec{w} + \vec{v}) = T(\vec{w}) + T(\vec{v}) = T(\vec{w}).$$

Como imagem(T) é um plano e portanto diferente de $\mathbb{R}^3$ a transformação T não é sobrejetora.

e) Achamos as imagens dos vértices do triângulo:

- $T(1, -1, 0) = (0, 0, 0) = A$,

- $T(1,3,4) = (4,0,0) = B$,
- $T(1,3,0) = (4,4,0) = C$.

Estes três ponto não estão alinhados (pois o vetor $\overline{AB} = (4,0,0)$ não é paralelo a $\overline{BC} = (4,4,0)$. A área deste triângulo Δ' é

$$\text{área}(\Delta') = \frac{|\overline{AB} \times \overline{BC}|}{2} = \frac{|(4,0,0) \times (4,4,0)|}{2}.$$

Calculamos

$$(4,0,0) \times (4,4,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,16).$$

Este vetor tem módulo 16. Portanto, a área do triângulo é 8.

---

2) Considere as transformações lineares S, $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$\begin{array}{lllll} S(1,1,0) & = (1,0,0), & & M(1,1,0) & = (1,0,0), \\ S(0,1,1) & = (0,1,0), & \text{e} & M(0,1,1) & = (0,1,0), \\ S(0,1,0) & = (0,0,1), & & M(0,1,0) & = (0,1,0). \end{array}$$

(a) Determine a matriz $[M \circ S]$ da composição $M \circ S$ na base canônica.

(b) Determine se S e M possuem inversas. Em caso afirmativo determine as matrizes das suas inversas $[S^{-1}]$ e $[M^{-1}]$ na base canônica.

(c) Determine todos os vetores não nulos tais que $S(\vec{u}) = S^{-1}(\vec{u})$

Resposta:

a) Temos:

- $S(1,0,0) = S(1,1,0) - S(0,1,0) = (0,-1,-1),,$
- $S(0,1,0) = (0,0,1)$ e
- $S(0,0,1) = S(0,1,1) - S(0,1,0) = (0,1,-1)$

Portanto,

$$[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Observe que

- $M(1,0,0) = M(1,1,0) - M(0,1,0) = (1,-1,0),$
- $M(0,1,0) = (0,1,0),$
- $M(0,0,1) = M(0,1,1) - M(0,1,0) = (0,0,0).$

Portanto,

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Logo a matriz da composição $M \circ S$ é

$$[M]\,[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Como $\det[S] = -1 \neq 0$, S possui inversa
Como $\det[M] = 0$, M não possui inversa.

Para encontrarmos $[S^{-1}]$ observamos que

- $S^{-1} \circ S(1,1,0) = (1,1,0)$,
- $S^{-1} \circ S(0,1,1) = (0,1,1)$ e
- $S^{-1} \circ S(0,1,0) = (0,1,0)$

e que

- $(1,0,0) = S(1,1,0)$,
- $(0,1,0) = S(0,1,1)$ e
- $(0,0,1) = S(0,1,0)$.

Portanto

- $S^{-1}(1,0,0) = S^{-1} \circ S(1,1,0) = (1,1,0)$,
- $S^{-1}(0,1,0) = S^{-1} \circ S(0,1,1) = (0,1,1)$ e
- $S^{-1}(0,0,1) = S^{-1} \circ S(0,1,0) = (0,1,0)$.

Logo,

$$[S^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Obviamente, v. pode usar o método de Gauss para calcular a matriz inversa.

c) Observe que se um vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ verifica $S(\vec{u}) = S^{-1}(\vec{u})$ então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Isto é

$$x = x, \quad z = x + y + z, \quad -x + y - z = y,$$

ou seja

$$x = x, \quad 0 = x + y, \quad -x - z = 0.$$

Logo $y = -x$ e $z = -x$. Assim temos os vetores da forma $(t, -t, -t), t \neq 0$.

---

3) Considere a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} .$$

cujo o polinômio carcterístico é

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

(a) Determine o valor de a.

(b) Determine os autovalores da matriz $[T]$ e os autovetores associados.

(c) Determine, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Determine a primeira coordenada do vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ (escrito na base canônica) na base β.

Resposta:

a) O traço de T é:

$$\text{traço}(T) = 0 + 2 + a = 4,$$

logo a = 2.

(b) Calculando:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((2-\lambda)^2-1)-(-(2-\lambda)+1)+(-1+(2-\lambda))$$

Temos então:

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda-2)=0.$$

Encontramos que 2 e 1 (multiplicidade algébrica 2) são os autovalores de T.

Para cada autovalor acharemos seu autovetor correspondente resolvendo o sistema linear determinado por

$$T(\vec{v}) = \lambda(\vec{v}).$$

Resolvendo para $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Encontramos que os autovetores são os vetores não nulos do plano de equação cartesiana

$$-x+y+z=0.$$

Portanto existem dois autovetores linearmente independentes associados a 1, por exemplo $(1,0,1)$ e $(0,1,-1)$.

Resolvendo para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Encontramos os vetores da forma $(t,t,t), t \neq 0$.

Assim podemos escrever uma base de autovetores:

$$\beta = \Big\{ \Big(1,1,1\Big), \Big(1,0,1\Big), \Big(0,1,-1\Big) \Big\}.$$

c) Escrever o vetor $(1,0,0)$ na base β é resolver a combinação linear:

$$(1,0,0) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,1,-1).$$

A solução (x,y,z) são as coordenadas de $(1,0,0)$ na base β.

Temos

$$1 = x + y, \quad 0 = x + z, \quad 0 = x + y - z.$$

Logo $z = 1$ e $x = -1$ Assim a primeira coordenada temos é $x = -1$.

---

4) Considere a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Determine, se possível, valores para a e b tais que a matriz T represente (na base canônica) a projeção no plano de equação cartesiana $y - z = 0$. Determine a direção da projeção.

Resposta: Obseve que se T representa uma projeção no plano $y - z$ então, para qualquer vetor $\vec{u}$ do plano se verifica $T(\vec{u}) = \vec{u}$.

Como o vetor $\vec{i} = (1,0,0)$ está no plano deveriamos ter $T(\vec{i}) = (1,0,0) \neq (0,-1,-1)$. Logo T não representa uma projeção no plano $y - z = 0$.