P2 de Álgebra Linear I – 2010.2

6 de Outubro de 2010

GABARITO

Questão 1)

Considere as retas r_1 e r_2 de $\mathbb{R}^3$ cujas equações paramétricas são

$$r_1\colon (1+t, 1+2\,t, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2\colon (a+2\,t, 1, 1+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os planos

$$\pi\colon 2\,x+y+2\,z=1, \qquad \tau\colon 2\,x+y+2\,z=3.$$

a) Determine **<u>todos</u>** os valores de a para que a distância entre as retas r_1 e r_2 seja 1.

b) Determine um ponto P que seja equidistante de π e τ, isto é, tal que a distância entre P e π e entre P e τ sejam iguais.

c) Determine um plano η tal que a distância entre η e π seja 3.

Resposta:

(a) Para calcular a distância entre as retas r_1 e r_2 escolhemos pontos $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$, por exemplo

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (a,1,1),$$

e vetores diretores v_1 de r_1 e v_2 de r_2, por exemplo

$$v_1 = (1,2,0), \quad v_2 = (2,0,1).$$

A distância entre as retas r_1 e r_2 é

$$d = \frac{|\overline{P_1 P_2} \cdot (v_1 \times v_2)|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Temos

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -4).$$

Também

$$\overline{P_1 P_2} = (a-1, 0, 0),$$

e

$$\|v_\times v_2\| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}.$$

Logo

$$\overline{P_1 P_2} \cdot (v_1 \times v_2) = (a-1, 0, 0) \cdot (2, -1, -4) = 2\,a - 2.$$

Portanto, para que a distância entre as retas seja 1 devemos ter

$$\frac{|2\,a-2|}{\sqrt{21}} = 1, \quad a = \frac{2+\sqrt{21}}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2-\sqrt{21}}{2}.$$

(b) Para obter um ponto equidistate dos planos π e τ consideramos uma reta ortogonal r aos planos e os pontos de interseção A e B de r com esses planos. Um ponto equidistante de π e τ é o ponto médio do segmento AB.

Considere, por exemplo, a reta r perpendicular a π e τ, dada por

$$r\colon (2\,t, t, 2\,t).$$

Determinamos os pontos de interseção $A = r \cap \pi$ e $B = r \cap \tau$. Estes pontos são obtidos, respectivamente, quando t verifica

$$\begin{aligned} 4\,t + t + 4\,t = 1, &\quad t = 1/9, \quad A = (2/9, 1/9, 2/9), \\ 4\,t + t + 4\,t = 3, &\quad t = 3/9, \quad B = (6/9, 3/9, 6/9), \end{aligned}$$

Um ponto P equidistante dos dois planos é

$$P = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{18}\,(8, 4, 8) = \frac{1}{9}\,(4, 2, 4).$$

De fato, de forma mais geral, o plano ν paralelo a π e que contém P está formado por pontos equidistantes dos planos π e τ

$$\nu\colon 2\,x + y + 2\,z = d, \quad d = \frac{1}{9}\,(2 \cdot 4 + 2 + 2 \cdot 4), \quad d = 18/9 = 2.$$

Logo qualquer ponto P do plano

$$2\,x + y + 2\,z = 2$$

verifica a condição de equidistância.

(c) O plano η deve ser paralelo a π (caso contrário a distância entre os planos seria 0). Portanto, o plano η é da forma

$$2\,x + y + 2\,z = d.$$

Temos que determinar d.

A distância entre os planos π e η é a distância entre qualquer ponto do plano η e π. Escolhemos o ponto $C = (0, d, 0)$ do plano η.

A distância entre C e π pode ser calculada como segue (há diversos métodos e este é o mais direto). Escolhemos qualquer ponto D de π, por exempos $D = (0, 1, 0)$. A distância procurada é o módulo da projeção ortogonal do vetor $\overline{DC}$ no vetor normal do plano π (o vetor $n = (2, 1, 2)$).

Temos

$$\overline{DC} = (0, d-1, 0)$$

e que o vetor projeção é

$$\frac{\overline{DC} \cdot n}{n \cdot n}\; n = \frac{(0, d-1, 0) \cdot (2, 1, 2)}{(2, 1, 2) \cdot (2, 1, 2)}\,(2, 1, 2) = \frac{d-1}{9}\,(2, 1, 2).$$

O módulo deste vetor é

$$\frac{|d-1|}{9}\; 3 = \frac{|d-1|}{3}.$$

Portando, devemos ter

$$\frac{d-1}{3} = \pm 3, \quad d = 1\, \pm 9, \quad d = 10 \quad \text{ou} \quad d = -8.$$

Questão 2) Considere a base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e os vetores

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_2 = v_1 + v_3, \quad \text{e} \quad w_3 = v_2 + v_3.$$

a) Comprove que $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Sabendo que as coordenadas do vetor u na base β são

$$(u)_\beta = (1, 1, 1),$$

determine as coordenadas de u na base γ.

c) Sabendo que as coordenadas do vetor n na base γ são

$$(n)_\gamma = (1, 1, 1),$$

determine as coordenadas de n na base β.

d) Considere o subespaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$u_1 = (1, -1, 0),\ u_2 = (2, 0, 1),\ u_3 = (1, 1, 1),\ u_4 = (0, 2, 1),\ u_5 = (1, 3, 2).$$

Determine uma base β de $\mathbb{W}$ e as coordenadas do vetor $v = (1, 5, 3)$ de $\mathbb{W}$ na base β.

Resposta:

(a) É suficiente verificar que os vetores w_1, w_2 e w_3 são linearmente independentes (lembre que três vetores l.i. de $\mathbb{R}^3$ formam uma base). Para isso devemos ver que a única combinação linear destes vetores cujo resultado é o vetor nulo é a combinação trivial:

$$\begin{aligned}\bar{0} = x\, w_1 + y\, w_2 + z\, w_3 &= x\,(v_1 + v_2 + v_3) + y\,(v_1 + v_3) + z\,(v_2 + v_3) = \\ &= (x + y)\, v_1 + (x + z)\, v_2 + (x + y + z)\, v_3.\end{aligned}$$

Como os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes temos que

$$x + y = 0, \quad x + z = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Portanto, considerando a terceira equação menos a primeira, temos $z = 0$. Das outras equações obtemos $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, a combinação linear dos vetores é necessariamente trivial e assim os vetores são l.i.. Portanto, $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sejam $(u)_\gamma = (x, y, z)$ as coordenadas de u na base γ. Então

$$\begin{aligned} u = x\,w_1 + y\,w_2 + z\,w_3 &= x\,(v_1 + v_2 + v_3) + y\,(v_1 + v_3) + z\,(v_2 + v_3) = \\ &= (x + y)\,v_1 + (x + z)\,v_2 + (x + y + z)\,v_3. \end{aligned}$$

Sabemos que $(u)_\beta = (1, 1, 1)$, logo

$$u = v_1 + v_2 + v_3.$$

Portanto, da unicidade de coordenadas em uma base, temos

$$x + y = 1, \qquad x + z = 1, \qquad x + y + z = 1.$$

As soluções do sistema são

$$z = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0.$$

Assim

$$(u)_\gamma = (1, 0, 0).$$

(c) Observe que como $(n)_\gamma = (1, 1, 1)$ temos

$$\begin{aligned} n = w_1 + w_2 + w_3 &= (v_1 + v_2 + v_3) + (v_1 + v_3) + (v_2 + v_3) = \\ &= 2\,v_1 + 2\,v_2 + 3\,v_3. \end{aligned}$$

Portanto, da unicidade de coordenadas em uma base, temos

$$(u)_\beta = (2, 2, 3).$$

(d) Observe que os vetores $u_1 = (1, -1, 0)$ e $u_2 = (2, 0, 1)$ não são paralelos. Portanto, geram o plano de vetorial cujo vetor normal é o vetor $u_1 \times u_2$,

$$u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2).$$

Este plano tem equações cartesianas

$$x + y - 2\,z = 0.$$

Observe que os vetores

$$u_3 = (1, 1, 1), \quad u_4 = (0, 2, 1), \quad u_5 = (1, 3, 2)$$

verificam esta equação cartesiana. Portanto estes vetores estão no subespaço. Portanto,

$$\mathbb{W} = \{v = (x, y, z) \colon x + y - 2\,z = 0\}.$$

Uma base α de $\mathbb{W}$ está formada por dois vetores l.i. de $\mathbb{W}$, por exemplo u_1 e u_2,

$$\alpha = \{u_1 = (1, -1,), \, u_2 = (2, 0, 1)\}.$$

As coordenadas do vetor $v = (1, 5, 3)$ de $\mathbb{W}$ na base α são

$$(v)_\alpha = (x, y)$$

onde

$$(1, 5, 3) = x\,u_1 + y\,u_2 = x\,(1, -1, 0) + y\,(2, 0, 1).$$

Portanto

$$1 = x + 2\,y, \quad 5 = -x, \quad 3 = y.$$

Assim

$$(v)_\alpha = (-5, 3).$$

Questão 3) Considere a base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{u_1 = (1, 0, 1), \, u_2 = (1, 1, 1), \, u_3 = (0, 2, 1)\}$$

e a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$T(u_1) = (0, 0, 0), \quad T(u_2) = (2, 1, 3), \quad T(u_3) = (2, 1, 3).$$

a) Determine a forma geral de T, isto é, determine $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, tais que

$$T(x, y, z) = \big(a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z, \; b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z, \; c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z\big).$$

b) Determine uma base δ do espaço imagem de T. Lembre que o espaço imagem de T é definido como

$$\mathrm{im}(T) = \{w \text{ tal que existe } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } w = T(v)\}.$$

c) Determine, se possível, dois vetores nao paralelos u e v de $\mathbb{R}^3$ e diferentes de $\bar{0}$ tais que $T(u) = T(v) = \bar{0}$.

Resposta:

a) Observe que se T é da forma

$$T(x, y, z) = \big(a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z,\ b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z,\ c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z\big)$$

então

$$T(\mathbf{i}) = (a_1, b_1, c_1), \quad T(\mathbf{j}) = (a_2, b_2, c_2), \quad T(\mathbf{k}) = (a_3, b_3, c_3).$$

Para determinar $T(\mathbf{i})$ primeiro escrevemos $\mathbf{i}$ na base β,

$$(1, 0, 0) = x\,(1, 0, 1) + y\,(1, 1, 1) + z\,(0, 2, 1),$$

logo

$$1 = x + y, \qquad 0 = y + 2\,z, \qquad 0 = x + y + z.$$

Portanto, $z = -1$, $y = 2$ e $x = -1$. Assim

$$\begin{aligned} T((1,0,0)) &= T\big(-(1,0,1) + 2\,(1,1,1) - (0,2,1)\big) = \\ &= -T((1,0,1)) + 2\,T((1,1,1)) - T((0,2,1)) = \\ &= -\,(0,0,0) + 2\,(2,1,3) - (2,1,3) = \\ &= (2,1,3). \end{aligned}$$

Também temos

$$T(1,0,1) = (0,0,0) \Longrightarrow T(1,0,0) + T(0,0,1) = (0,0,0)$$

logo

$$T(0,0,1) = -T(1,0,0) = (-2,-1,-3).$$

Finalmente,

$$T(0,2,1) = (2,1,3), \quad 2\,T(0,1,0) + T(0,0,1) = (2,1,3)$$

logo

$$2\,T(0,1,0) = -T(0,0,1) + (2,1,3) = (4,2,6), \quad T(0,1,0) = (2,1,3).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{i}) &= (2,1,3) = (a_1, b_1, c_1), \\ T(\mathbf{j}) &= (2,1,3) = (a_2, b_2, c_2), \\ T(\mathbf{k}) &= -(2,1,3) = (a_3, b_3, c_3). \end{aligned}$$

Assim a fórmula geral de T é

$$T(x,y,z) = \big(2\,x + 2\,y - 2\,z,\; x + y - \;z,\; 3\,x + 3\,y - 3\,z\big).$$

b) A imagem de T é gerada pelas imagens dos elementos de uma base. Portanto é gerada por

$$T(\mathbf{i}) = (2,1,3), \quad T(\mathbf{j}) = (2,1,3), \quad T(\mathbf{k}) = -(2,1,3).$$

Estes vetores são paralelos. Portanto, uma base δ da imagem é

$$\delta = \{(2,1,3)\}.$$

c) Devemos resolver o sistema

$$T(x,y,z) = \big(2\,x + 2\,y - 2\,z,\; x + y - \;z,\; 3\,x + 3\,y - 3\,z\big) = (0,0,0).$$

Ou seja

$$x + y - z = 0.$$

Agora é suficiente escolher duas soluções do sistema correspondentes a dois vetores não paralelos e não nulos. Por exemplo, $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.