MAT 1200 – Turma Especial – Prova 1
06/04/2013

1. (2,5) (a) O espaço coluna de A é uma reta.

   (b) Falso. O espaço linha de A é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   (c) A matrix não tem posto cheio nem em linhas, nem em colunas.

2. (2,5) O vetor
$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
pertence ao espaço coluna da matrix A e portanto e correponde a solução particular
$$x_{\text{part}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$
A nulidade da matrix é gerada pelo vetor
$$x_{\text{nul}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$
Portanto a solução geral do problema é
$$x_{\text{sol}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. (2,5) (a) A tem 5 colunas e duas colunas livres, i.e., o tamanho do espaço de nulidade. Portanto, o posto de de A e a dimensão do espaço coluna de A devem ser 3.

   (b) A nulidade da matrix B é a mesma que a nulidade da matrix A.

   (c) $C = AM$, onde M é a seguinte matriz inversível:
$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Seja y um vetor na nulidade de C, então My é vetor da nulidade de A. Dito de outra forma, se x pertence a nulidade de A, $M^{-1}x$

pertence a nulidade de C. Portanto uma base para a nulidade de C são as colunas de

$$M^{-1}N,$$

onde N é a matrix

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matrix inversa de M é:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto uma base para $N(C)$ é

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (2,0)

(a) Os espaço de matrizes 4×4 tem dimensão 16: você precisa de 16 números para preencher uma matrix de ordem 4. Existem 24 matrizes de permutação de ordem 4, e portanto elas não podem ser independentes. Toda base de M_4 tem necessariamente 16 elementos.

(b) Desafio. Toda matriz de permutação é uma matriz mágica: a soma das entradas de uma linha, ou coluna é sempre 1. Portanto, se somarmos duas matrizes de permutação,

$$aP_1 + bP_2,$$

a matrix resultante tem $\sum_k a_{ik} = a + b$ e $\sum_k a_{ki} = a + b$.

Portanto, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não pode ser escrita como matriz de a combinação linear de matrizes permutação e as matrizes de permutação não geram M_4.

5. (2,0) Permute primeiro as linhas 1 e 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida elimine o elemento na posição $(3,1)$:

$$\xrightarrow{E_{31}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E por último elimine o elemento na posição $(2,3)$:

$$\xrightarrow{E_{23}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O balanço de operações é o seguinte: $E_{23}E_{31}P_{21}A = I$. Portanto a matriz inversa é

$$A^{-1} = E_{23}E_{31}P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (2,0) (a) A coluna livre de A é a (coluna 1). As colunas pivô são 2 e 3.

   (b) M não tem colunas livre, e todas colunas são colunas pivô.

   (c) $Ax = b$ admite solução se $b_2 = 2b_1$.

   (d) $Mx = b$ admite solução única para todo b.