G1 de Álgebra Linear I – 2013.1

6 de Abril de 2013.

Gabarito

---

1) Considere o triângulo ABC de vértices A, B e C. Suponha que:

(i) o vértice B do triângulo pertence às retas de equações paramétricas

$$r: (-6+3t, 2t, 3), t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: (3t, -2t, 3), t \in \mathbb{R},$$

(ii) o vértice C do triângulo tem coordenadas $C = (4, -1, 3)$,

(iii) o ponto médio M do segmento AC pertence à reta s e tem coordenadas

$$M = (6, m_1, m_2), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{R}.$$

Determine:

(a) As coordenadas dos vértice A e B.

(b) A área do triângulo ABC.

(c) A equação cartesiana do plano α que contém a reta r e é perpendicular ao plano que contém o triângulo ABC.

Resposta:

a) Calcularemos primeiro as coordenadas do vértice A. Observamos que o ponto M está na reta s, logo $6 = 3t$, $t = 2$ e suas coordenadas são

$$m_1 = -2(2) = -4, \qquad m_2 = 3.$$

Portanto

$$M = (6, -4, 3).$$

Como

$$M = (A + C)/2$$

temos $A = 2M - C$,

$$A = (12 - 4, -8 + 1, 6 - 3) = (8, -7, 3).$$

Para calcular as coordenadas do vértice B observamos que B é o ponto de interseção das retas r e s. Essa interseção é obtida a partir da solução do sistema (escrevemos k o parmetro da reta s)

$$-6 + 3t = 3k, \qquad 2t = -2k,$$

cuja solução é $k = -t$, $-6 + 6t = 0$, $t = 1$ e $k = -1$ e $t = 1$. Assim,

$$B = (-3, 2, 3).$$

b) Calcularemos a área do triângulo ABC. Observe que os vetores

$$\overline{AB} = B - A = (-11, 9, 0) \quad \text{e} \quad \overline{AC} = C - A = (-4, 6, 0)$$

geram um paralelogramo cuja área é o módulo do produto vetorial

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -11 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -30).$$

Assim, a área do triângulo vale 15 (a metade da área do paralelogramo).

c) Determinaremos a equação cartesiana do plano α que contém a reta r e é perpendicular ao plano que contém o triângulo ABC.

O plano que contém o triângulo ABC tem vetor normal paralelo a $\overline{AB} \times \overline{AC} = (0, 0, -30)$ (escolhemos o vetor $(0, 0, 1)$) e contém o ponto $B = (-3, 2, 3)$. Portanto, sua equação cartesiana é

$$z = 3.$$

Assim, dois vetores diretores do plano α (não paralelos) são o vetor $(3, 2, 0)$ (diretor da reta r) e o vetor $(0, 0, 1)$ (normal do plano α que contém o triângulo). Obtemos um vetor n, normal ao plano α, calculando

$$n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -3, 0).$$

Logo

$$\alpha : 2x - 3y = d.$$

Como $B \in \alpha$, tem-se que $d = -12$ e portanto

$$\alpha : 2x - 3y = -12.$$

---

2) Considere o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + 2z &= 2, \\ x + y + 2z &= 2a, \\ 3x + 3y + 6z &= b. \end{aligned}$$

a) Determine, se possível, valores de a e b para que a solução do sistema seja uma reta. Determine (caso a reta exista) a equação paramétrica da reta solução.

b) Determine, se possível, valores de a e b para que a solução do sistema seja um único ponto.

Resposta:

a) Escalonando o sistema temos:

$$\begin{aligned}
&x + y + z = 1,\\
&0x + 0y + z = 1,\\
&0x + 0y + z = 2a - 1,\\
&0x + 0y + z = (b-3)/3.
\end{aligned}$$

Logo o sistema é possível indeterminado para $a = 1$ e $b = 6$.

Observe que neste caso temos apenas duas equações (a terceira equação é igual à segunda e a quarta é a primeira multiplicada por 3). Portanto, que a solução é a interseção de dois planos não paralelos (uma reta).

Usando o sistema já escalonado obtemos $z = 1$ e $x = -y$, logo a equação paramétrica da reta é $s : (t, -t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) A solução do sistema não pode ser um único ponto , pois o sistema é possível e indeterminado (visto no ítem acima quando $a = 1$ e $b = 6$) ou impossível para $a \neq 1$ ou $b \neq 6$.

---

3) Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = 1, \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

e

$$r_2 : (t, 2t+2, 2t-5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considere o plano de equações paramétricas

$$\alpha : (3 + t + 2s, 2s, 1 + t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Seja R o ponto de interseção da reta r_1 e do eixo $\mathbb{X}$.

a) Calcule a distância da reta r_1 ao plano α.

b) Determine a equação paramétrica da reta ℓ que passa pelo ponto R e é perpendicular ao plano α.

c) Determine o ponto Q de interseção entre a reta r_2 e o plano α. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico L dos pontos X de $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes dos pontos Q e R (isto é, $\text{dist}(Q, X) = \text{dist}(R, X)$, onde $\text{dist}(A, B)$ denota a distância entre os pontos A e B).

Resposta:

a) Para calcular a distância da reta r_1 ao plano α obtemos primeiro o vetor normal n do plano α,

$$n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2).$$

Logo,

$$\alpha : x - y - z = d = 2,$$

onde d foi encontrado substituindo o ponto $(3,0,1)$ na equação de α.

Observe que uma equação paramétrica de r é

$$r_1 : (1+2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como o vetor diretor $(2,1,1)$ de r_1 é perpendicular ao vetor normal de α $((2,1,1)\cdot(1,-1,-1) = 2-1-1 = 0)$ temos que a reta r_1 é paralela a α.

Portando a distância d entre α e r_1 é a distância entre qualquer ponto de α e r_1. Escolhemos o ponto $A = (2,0,0)$ de α. Escolhemos também o ponto $P = (1,0,0)$ de r_1. Usando o método da área do paralelogramos temos que a distância d é

$$\frac{||\overline{PA} \times (2,1,1)||}{||(2,1,1)||} = \frac{||\overline{(1,0,0)} \times (2,1,1)||}{||(2,1,1)||} = \frac{||(0,-1,1)||}{||(2,1,1)||} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}.$$

b) Para determinar a equação da reta ℓ que passa pelo ponto $R = (1,0,0)$ e é perpendicular ao plano α consideramos o vetor normal $(1,-1,-1)$ do plano α como vetor diretor da reta ℓ. Logo,

$$\ell\colon (1+t, -t, -t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Determinaremos o ponto Q de interseção entre a reta r_2 e o plano α. A interseção da reta r_2 com o plano α

ocorre para o parâmetro t que verifica

$$(t) - (2t+2) - (2t-5) = 2 \Rightarrow -3t = -1 \Rightarrow t = 1/3.$$

Logo

$$Q = (1/3, 8/3, -13/3).$$

Observamos que o lugar geométrico L dos pontos X de $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes dos pontos Q e R é o plano ρ perpendicular ao vetor $\overline{RQ}$ e pasa pelo ponto médio M de do segmento RQ. Observe que $R = (1,0,0)$ (use a equação paramétrica de r_1). Temos

$$\overline{RQ} = (-2/3, 8/3, -13/3).$$

Podemos escolher como vetor normal do plano o vetor $(2, -8, 13)$. O ponto M é

$$M = \left(\frac{1/3+1}{2}, \frac{8/3}{2}, \frac{-13/3}{2}\right) = (4/6, 8/6, -13/6).$$

Logo

$$\beta : 2x - 8y + 13z = d = -225/6.$$

---

4) Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) Se u e v são vetores do $\mathbb{R}^3$ perpendiculares e de mesmo módulo, então $\| u \times v \| = u \cdot u$.

Verdadeiro.

Justificativa: Temos que $u \cdot v = 0$ e $\|u\| = \|v\|$. Assim,

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\text{sen}\theta = \|u\|^2 \cdot 1 = u \cdot u.$$

b) Seja $\text{proj}_w u$ a projeção ortogonal do vetor u sobre o vetor w. Se u, v e w são vetores unitários tais que

$$\text{proj}_w(u+v) = \text{proj}_w u,$$

então o vetor v é perpendicular ao vetor w.

Verdadeiro.

Justificativa: A condição implica

$$\text{proj}_w(u+v) = \text{proj}_w u \Leftrightarrow ((u+v)\cdot w)w = (u \cdot w)w.$$

Portanto,

$$(u \cdot w)w + (v \cdot w)w = (u \cdot w)w \Rightarrow (v \cdot w)w = 0 \Rightarrow v \cdot w = 0.$$

Portanto, v é perpendicular a w.

c) Seja A uma matriz quadrada 3×3 tal que $\det(A) = k \neq 0$. Então

$$\det(2\,A) = 2k.$$

Lembre que $\det(A)$ denota o determinante da matriz A

Falso.

Justificativa: Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos $\det A = 1 = k$ e $det(2A) = 8 \neq 2k = 2$.