G1 de Álgebra Linear I – 2008.2

Gabarito

---

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

• Existem vetores não nulos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que vale a relação

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = 2\,\overrightarrow{w}.$$

Resposta: Falso. Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ são paralelos então $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \neq 2\,\overrightarrow{w}$. Se os vetores não são paralelos então $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ é um vetor não nulo ortogonal a $\overrightarrow{w}$. Portanto, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} \neq 2\,\overrightarrow{w}$.

• Para todo par de vetores não nulos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ ortogonais entre si, isto é $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, existe um vetor $\overrightarrow{n}$ tal que

$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}.$$

Resposta: Verdadeiro. Considere um vetor $\overrightarrow{m}$ ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ (por exemplo, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$). Neste caso os vetores $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são ortogonais entre si. Portanto

$$\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{u} = \kappa\,\overrightarrow{w},$$

para certo $\kappa \in \mathbb{R}$ diferente de zero, de fato, $\kappa = \pm\dfrac{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{w}|}$. Agora é suficiente escolher

$$\overrightarrow{m} = \frac{1}{\kappa}\,\overrightarrow{m}.$$

• Considere vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) = 0.$$

Então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ têm o mesmo módulo (norma).

Resposta: Verdadeiro. Observe que se verifica

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}= \\ &= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}= \\ &= |\overrightarrow{u}|^2-|\overrightarrow{w}|^2=0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\overrightarrow{u}|^2-|\overrightarrow{w}|^2=0, \qquad |\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{w}|,$$

e a afirmação é verdadeira.

• Considere vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que seus módulos (normas) verificam

$$|\overrightarrow{w}|=1, \quad |\overrightarrow{v}|=4, \quad \text{e} \quad |\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v}|=4.$$

Então $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Resposta: Verdadeiro. Observe que se θ é o ângulo formado pelos vetorer $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ temos

$$4=|\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}|\,|\sin\theta|=4\,|\sin\theta|.$$

Logo $\sin\theta=\pm1$ e $\cos\theta=0$. Portanto,

$$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}|\,\cos\theta=0.$$

• Considere os pontos $A=(1,3,1)$ e $B=(1,2,2)$ e qualquer ponto C na reta $(1,3,2)+t(0,1,-1)$. A área do triângulo de vértices A, B e C é $1/2$.

Resposta: Verdadeiro. Dado um ponto $C=(1,3+t,2-t)$ da reta considere os vetores

$$\overline{AC}=(0,t,1-t), \qquad \overline{BA}=(0,1,-1)$$

Das propriedades dos determinantes

$$\overline{AC}\times\overline{BA}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & t & 1-t\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,0,0).$$

Como a área do triângulo é $\dfrac{|\overline{AC} \times \overline{BA}|}{2} = \dfrac{1}{2}$ obtemos a veracidade da afirmação.

Prova A

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c	x		
1.d	x		
1.e	x		

Prova B

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b	x		
1.c	x		
1.d	x		
1.e		x	

Prova C

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b	x		
1.c	x		
1.d		x	
1.e	x		

Prova D

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b	x		
1.c		x	
1.d	x		
1.e	x		

---

2) Respostas:

(a)

prova A $P = (9, -7, 2)$.

prova B $P = (-7, 9, 2)$.

prova C $P = (2, -7, 9)$.

prova D $P = (9, 2, -7)$.

(b)

prova A $c = 9$.

prova B $c = 8$.

prova C $c = 10$.

prova D $c = 5$.

(c)

prova A $a = 5$.

prova B $a = 1$.

prova C $a = -11$.

prova D $a = 10$.

(d)

prova A	$\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$.
prova B	$\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$.
prova C	$\overrightarrow{v} = (1, 4, 3)$.
prova D	$\overrightarrow{v} = (1, 4, 3)$.

(e)

prova A	$k = 7$.
prova B	$k = 6$.
prova C	$k = 10$.
prova D	$k = 3$.

---

3) Considere a reta r_1 de equações paramétricas

$$r_1\colon (2\,t, 1 + t, -1 - t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e a reta r_2 de equações cartesianas

$$x + 2y - 2z = 1, \quad x - y = 2.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos π e ρ (escritos em equações cartesianas) tais que π seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

b) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 - reversas, paralelas ou concorrentes (se interceptam).

d) Considere o ponto $P = (0, 1, -1)$ da reta r_1. Encontre **todos** os pontos Q da reta r_1 tal que a distância entre P e Q seja $2\sqrt{6}$ (isto é, de forma que o comprimento do segmento PQ seja $2\sqrt{6}$).

Resposta:

3.a) O plano π é paralelo ao vetor diretor da reta, $(2,1,-1)$, e ao vetor $\mathbf{i}=(1,0,0)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{n}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-1,-1).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é da forma

$$y+z=d.$$

Como o ponto $(0,1,-1)$ pertence ao plano π, $d=0$. Logo

$$\pi\colon y+z=0.$$

Analogamente, o plano ρ é paralelo ao vetor diretor da reta, $(2,1,-1)$, e ao vetor $\mathbf{k}=(0,0,1)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{m}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,0).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano ρ é da forma

$$x-2\,y=e.$$

Como o ponto $(0,1,-1)$ pertende ao plano, $e=-2$. Logo

$$\rho\colon x-2\,y=-2.$$

3.b) Escolhemos y como parâmetro, $y=t$, e temos $x=2+t$. Portanto

$$2\,z=-1+x+2\,y=-1+2+t+2\,t=1+3\,t, \quad z=1/2+3\,t/2.$$

Portanto,

$$(2+t,t,1/2+3\,t/2), \qquad t\in\mathbb{R}.$$

3.c) Devemos estudar se o sistema a seguir tem solução

$$2+s=2\,t, \quad s=1+t, \quad 1/2+3\,s/2=-1-t.$$

Das duas primeiras equações obtemos

$$2 + 1 + t = 2\,t, \quad t = 3.$$

Portanto, $s = 4$. Estas soluções são incompatíveis com a última equação ($13/2 \neq -4$). Portanto, o sistema não tem solução e as retas não se interceptam.

Finalmente, os vetores diretores das retas são $(2, 2, 3)$ e $(2, 1, -1)$. Estes vetores não são paralelos. Logo as retas são reversas.

3.d) Dado um ponto $Q = (2\,t, 1+t, -1-t)$ de r_1 temos que $\overline{PQ} = (2\,t, t, -t)$. Este vetor tem módulo $|t|\,\sqrt{6}$. Queremos que $|t|\,\sqrt{6} = 2\,\sqrt{6}$. Logo $|t| = 2$ e portanto $t = \pm 2$. Existem duas soluções:

$$Q = (4, 3, -3),\ (t = 2), \qquad Q = (-4, -1, 1),\ (t = -2).$$

---

4)

a) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x - 3\,y + 2\,z = 1, \qquad \tau = a\,x - 12\,y + c\,z = d.$$

Se possível, determine **a**, **c** e **d** para que a interseção dos planos seja:

i) o conjunto vazio (ou seja, os planos não se interceptam), isto é $\pi \cap \tau = \emptyset$,

ii) um ponto P (ou seja, a intereseção dos planos é exatamente em um ponto), isto é, $\pi \cap \tau = \{P\}$,

iii) uma reta r.

Considere agora os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 2)$.

b) Determine uma equação cartesiana do plano ρ que contém os pontos A, B e C.

c) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.

Resposta:

4.a)
(i) Para que a interseção seja o conjunto vazio (isto é, os planos não se interceptam) os planos devem ser paralelos. Logo os vetores normais devem ser paralelos:

$$(a, -12, c) = \lambda\,(2, -3, 2).$$

Logo $\lambda = 4$ e $a = c = 8$. Finalmente, os planos devem ser diferentes, logo é suficiente escolher $d \neq 4$ (pois se $d = 4$ os planos coincidem).
(ii) A opção um ponto é impossível: a interseção de dois planos é ou o conjunto vazio (planos paralelos e diferentes), ou um plano (planos iguais), ou uma reta (planos não paralelos).
(iii) Para que a interseção seja uma reta é suficiente escolher $a \neq 8$ ou $c \neq 8$. Nestes casos, não há restrições para d.

4.b) Considere os vetores $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$. Um vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano é

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, -3).$$

A equação cartesiana do plano é da forma

$$x + 2\,y - 3\,z = d,$$

onde d é determinado pela condição dos pontos A, B e C pertencer a π, ou seja: $1 + 0 - 3 = d = -2$. Portanto,

$$x + 2\,y - 3\,z = -2.$$

4.c) Existem as seguintes possibilidades para o ponto D:

- $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, isto é, $\overline{AB} = \pm\overline{CD}$,
- $\overline{AC}$ paralelo a $\overline{BD}$, isto é $\overline{AC} = \pm\overline{BD}$

O caso $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{BC}$ caimos em casos precedentes, faça uma figura.

No primeiro caso podemos ter

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{CD}, \quad B - A = D - C, \quad D = B + C - A, \\
D &= (0,2,2) + (2,1,2) - (1,0,1) = (1,3,3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \overline{DC}, \quad B - A = C - D, \quad D = C + A - B \\
D &= (2,1,2) + (1,0,1) - (0,2,2) = (3,-1,1).
\end{aligned}$$

No segundo caso podemos ter

$$\begin{aligned}
&\overline{AC} = \overline{BD}, \quad C - A = D - B, \quad D = C + B - A, \\
&D = (2,1,2) + (0,2,2) - (1,0,1) = (1,3,3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{AC} = \overline{DB}, \quad C - A = B - D, \quad D = A + B - C, \\
&D = (1,0,1) + (0,2,2) - (2,1,2) = (-1,1,1).
\end{aligned}$$