P1 de Álgebra Linear I – 2008.1

Gabarito

---

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **<u>COM CANETA</u>** sua resposta no quadro a seguir.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c		x	
1.d	x		
1.e	x		

1.a) Para todos os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{n}$ de $\mathbb{R}^3$ vale a relação

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{n}) \times \overrightarrow{w}.$$

Resposta: Falso. Considere, por exemplo, os vetores

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

e faça

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} = \mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{w} = \mathbf{j}.$$

Então se verifica

$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{w} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}.$$

Portanto,

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{n}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \times w = \overrightarrow{0}.$$

Por outro lado,
$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{w}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

1.b) Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ de mesmo módulo (norma). Então
$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) = 0.$$

Resposta: Verdadeiro. Temos
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = \\ &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = \\ &= |\overrightarrow{u}|^2 - |\overrightarrow{w}|^2 = 0.\end{aligned}$$

1.c) Considere vetores não nulos $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ de $\mathbb{R}^3$ tais que
$$\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_3.$$
Então os vetores $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ são paralelos.

Resposta: Falso. Considere $\overrightarrow{u}_1 = \mathbf{i}$ e $\overrightarrow{u}_2 = \mathbf{j}$. Então $\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Vejamos quem pode ser $\overrightarrow{u}_3$. Se $\overrightarrow{u}_3 = (x, y, z)$ se deve verificar a relação
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, -z, y).$$
Isto é, podemos escolher qualquer vetor da forma $(x, 1, 0)$. Por exemplo, $\overrightarrow{u}_3 = (1, 1, 0) \neq (0, 1, 0)$.

1.d) Considere vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ e seus módulos (normas) verificam $|\overrightarrow{w}| = 2$ e $|\overrightarrow{v}| = 3$. Então o módulo (norma) do vetor $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$ é 6.

Resposta: Verdadeiro. A condição $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ implica que os vetores são perpendiculares. Isto é, formam um ângulo θ de $\pi/2$. Temos
$$|\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}| \sin \pi/2 = |\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}| = 2 \cdot 3 = 6.$$

1.e) Considere os pontos $A = (1,3,1)$ e $B = (1,2,2)$ e qualquer ponto C na reta $(1,3,2) + t(0,1,-1)$. A área do triângulo de vértices A, B e C é $1/2$.

Resposta: Verdadeiro. Dado um ponto C da reta considere os vetores

$$\overline{AC} = (0, t, 1-t), \qquad \overline{BA} = (0, 1, -1)$$

Das propriedades dos determinantes

$$\overline{AC} \times \overline{BA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 0).$$

Como a área do triângulo é $\dfrac{|\overline{AC} \times \overline{BA}|}{2} = 1/2$ obtemos a veracidade da afirmação.

---

2)

a) Considere os vetores $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{w} = (1,1,-1)$ e $\overrightarrow{n} = (x,1,z)$. Determine x e z para que o vetor $\overrightarrow{n}$ tenha módulo (norma) igual a $\sqrt{6}$ e verifique

$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}.$$

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 2) \cdot \big((1,0,1) \times (1,1,-1)\big) = 5.$$

c) Considere o ponto $P = (1,2,1)$ e a reta $r\colon (1+t, 2+t, 1-2t)$. Determine **todos** os pontos Q da reta r tais que o segmento PQ tenha comprimento $2\sqrt{6}$.

d) Determine o ponto Q de interseção da reta r do item anterior e o plano η de equação cartesiana

$$\eta\colon x + 2\,y + z = 2.$$

Resposta:

2.a) O vetor $\overrightarrow{n}$ deve verifica

$$(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -(x-z), -1).$$

Logo

$$x - z = -1.$$

Temos que $\overrightarrow{n}$ é da forma $(x, 1, 1+x)$. Para que este vetor tenha módulo $\sqrt{6}$ deve-se ter

$$6 = x^2 + 1 + (1+x)^2 = 2\,x^2 + 2\,x + 2, \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \qquad x = -2,\, x = 1.$$

Obtemos assim

$$\overrightarrow{n} = (-2, 1, -1), \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{n} = (1, 1, 2).$$

2.b)

$$5 = \begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \quad -1 + 2\,c + 2.$$

Portanto, $2\,c = 4$ e $c = 2$.

2.c) Observe que $Q = (1+t, 2+t, 1-2\,t)$ e que

$$\overline{PQ} = t\,(1, 1, -2).$$

Portanto,

$$|\overline{PQ}| = |t|\,\sqrt{1+1+4} = |t|\,\sqrt{6} = 2\,\sqrt{6}.$$

Logo $t = \pm 2$ existem duas possibilidades

$$Q = (3, 4, -3) \quad \text{e} \quad Q = (-1, 0, 5).$$

2.d) Devemos encontrar o valor de t que verifique

$$(1+t) + 2\,(2+t) + 1 - 2\,t = 2, \qquad 6 + t = 2, \qquad t = -4.$$

O ponto de interseção da reta e o plano é $(-3, -2, 9)$

---

3) Considere o ponto $P = (2, 1, 1)$ e as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1\colon (1+t, 2\,t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon (4+t, 2-2\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine equações cartesianas da reta r_1.

b) Determine o ponto C de interseção das retas r_1 e r_2.

c) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos (escritos de forma cartesiana) π e ρ, onde π é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ é paralelo ao $\mathbb{Y}$.

d) Determine a equação cartesiana do plano β que contém o ponto P e a reta r_1.

e) Determine as equações paramétricas da reta r_3 cujas equações cartesianas são

$$r_3 : \begin{cases} 3\,x - y + 2\,z = 4 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Resposta:

3.a) Devemos determinar dois planos (não paralelos) que contenham a reta r_1. O vetor diretor da reta é $(1, 2, -1)$. Logos os vetores normais dos planos devem ser perpendiculares a este vetor. Por exemplo, $\overrightarrow{n} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{m} = (1, 1, 3)$. Assim os planos são da forma

$$x + z = d, \qquad x + y + 3\,z = e.$$

Determinamos d e e pela condição de que o ponto $(1,0,1)$ da reta pertence a estes planos:

$$1+1=2=d, \qquad 1+0+3=4=e.$$

Portanto,

$$r_1\colon \begin{cases} x+z=2, \\ x+y+3\,z=4. \end{cases}$$

Obviamente, existem muitas outras possibilidades na escolha dos planos.

V. também poderia raciocinar como segue: temos $y=2\,t$, portanto,

$$x=1+t=1+y/2, \qquad 2\,x-y=2.$$

Também temos

$$z=1-t=1-y/2, \qquad y+2\,z=2.$$

Logo,

$$r_1\colon \begin{cases} 2\,x-y=2, \\ y+2\,z=2. \end{cases}$$

3.b) Devemos resolver o sistema

$$1+t=4+s, \quad 2\,t=2-2\,s, \quad 1-t=s.$$

Somando a primeira e a última equação obtemos

$$2=4+2\,s$$

Temos $s=-1$. Da primeira equação obtemos $t=2$. Observe que estas condições são compatíveis com a segunda equação. Portanto, o ponto de interseção é $(3,4,-1)$.

3.c) O plano π é paralelo ao vetor diretor da reta, $(1,2,-1)$, e ao vetor $\mathbf{i}=(1,0,0)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{n}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-1,-2).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é da forma

$$y+2\,z=d.$$

Como o ponto $(1,0,1)$ pertende ao plano, $d = 2$. Logo

$$\pi \colon y + 2\,z = 2.$$

Analogamente, o plano ρ é paralelo ao vetor diretor da reta, $(1,2,-1)$, e ao vetor $\mathbf{j} = (0,1,0)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{m}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,0,1).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano ρ é da forma

$$x + z = e.$$

Como o ponto $(1,0,1)$ pertende ao plano, $e = 2$. Logo

$$\rho \colon x + z = 2.$$

3.d) Escolhemos o ponto $Q = (1,0,1)$ da reta. Temos que os vetores $(1,2,-1)$ (o vetor diretor da reta) e $\overline{QP} = (1,1,0)$ são paralelos ao plano β. Portanto, o vetor normal de β é paralelo ao vetor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,-1).$$

Assim

$$\beta \colon x - y - z = d.$$

Como $Q = (1,0,1) \in \beta$ temos que $d = 0$,

$$\beta \colon x - y - z = 0.$$

3.e) Para determinar as equações resolvemos o sistema

$$3\,x - y + 2\,z = 4, \quad x + y - z = 1.$$

Escalonando

$$x + y - z = 1, \qquad -4\,y + 5\,z = 1.$$

Escolhemos $z = t$ como parâmetro e obtemos

$$y = -1/4 + (5/4)\,t$$

Substituindo na primeira equação

$$x = 1 - y + z = 1 - (-1/4 + (5/4)\,t) + t = 5/4 - (1/4)\,t.$$

Obtemos assim as equações paramétricas

$$(5/4 - t/4, -1/4 + 5\,t/4, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando o vetor diretor por 4 temos

$$(5/4 - t, -1/4 + 5\,t, 4\,t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Verifique que o vetor $(-1, 5, 4)$ é perpendicular aos vetores normais dos planos ($(1, 1, -1)$ e $(3, -1, 2)$) e que o ponto $(5/4, -1/4, 0)$ pertence aos dois planos.