G1 de Álgebra Linear I – 2007.2

5 de setembro de 2007

Gabarito

---

1) Considere o ponto $P = (0, 1, 2)$ e a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (2\,t, 1 - t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto P.

(b) Determine a equação cartesiana do plano ϱ perpendicular à reta r que contém o ponto P.

(c) Determine o ponto M da reta r mais próximo de P e a distância entre o ponto P e a reta r.

(d) Determine a equação cartesiana do plano τ paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ (isto é, o vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ é um vetor paralelo ao plano τ) tal que a interseção do plano τ e o plano π do item (a) seja exatamente a reta r.

Resposta:

(1a) Considere o ponto $Q = (0, 1, 1)$ da reta (obtido fazendo $t = 0$). O vetor $w = \overline{QP} = (0, 0, 1)$ é um vetor paralelo ao plano π. O vetor diretor da reta r, $v = (2, -1, 1)$, também é um vetor paralelo ao plano π. Portanto, um vetor normal do plano é

$$n = v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 0).$$

Assim a equação cartesiana de π é da forma

$$\pi\colon x + 2\,y = d.$$

Determinamos d pela condição $P \in \pi$,

$$0 + 2\,(1) = d, \quad d = 2.$$

Portanto,

$$\pi\colon x + 2\,y = 2.$$

(1b) Um vetor normal m do plano ϱ é o vetor diretor da reta r. Assim

$$m = v = (2, -1, 1)$$

e a equação cartesiana de ϱ é da forma

$$\varrho\colon 2\,x - y + z = d.$$

Determinamos d pela condição $P = (0, 1, 2) \in \varrho$,

$$2\,(0) - (1) + (2) = 1 = d.$$

Logo,

$$\varrho\colon 2\,x - y + z = 1.$$

(1c) O ponto M é a interseção da reta r e o plano ϱ. Devemos determinar o valor de t tal que

$$2\,(2\,t) - (1 - t) + (1 + t) = 1, \quad 6\,t = 1, \quad t = 1/6.$$

Logo

$$M = (2\,(1/6), 1 - (1/6), 1 + (1/6)) = (2/6, 5/6, 7/6).$$

A distância d é o módulo do vetor $\overline{PM}$,

$$\overline{PM} = (2/6, -1/6, -5/6) = 1/6\,(2, -1, -5).$$

(Observe que o vetor $\overline{PM}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta r.) Portanto,

$$d = \frac{1}{6}\,\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{4 + 1 + 25} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

(1d) O vetor $\mathbf{i} = (1,0,0)$ e o vetor $v = (2,-1,1)$ são vetores paralelos ao plano τ. Portanto, um vetor normal do plano é

$$m = v \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,1).$$

Assim a equação cartesiana de τ é da forma

$$\pi\colon y + z = d.$$

Determinamos d pela condição $r \subset \tau$, em particular $Q = (0,1,1) \in \tau$. Portanto,

$$1 + 1 = d, \quad d = 2.$$

Portanto,

$$\tau\colon y + z = 2.$$

---

2) Considere o plano ρ de equação cartesiana

$$\rho\colon x + y - z = 1.$$

(a) Determine **todos** os planos π cuja distância ao plano ρ seja $\sqrt{3}$.

(b) Considere a reta

$$s\colon (2 + t, t, 1 + 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Estude se existe um ponto da reta s cuja distância a ρ e seja 5.

(c) Determine uma equação paramétrica do plano ρ.

(d) Considere as retas

$$r\colon (1 + t, a + 2\,t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s\colon (t, 1 - t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a para que a distância entre as retas r e s seja $\dfrac{3}{\sqrt{35}}$.

Resposta:

(2a) Os planos devem ser paralelos a π: caso contrário os planos se interceptariam e a distância entre eles seria nula. Logo a forma geral dos planos é

$$\pi\colon x + y - z = e.$$

Devemos determinar e. Observe que a distância entre π e ρ é a distância entre **qualquer** ponto de π e ρ. Portanto, podemos escolher o ponto $P = (e, 0, 0)$ onde e será determinado de forma que a distância entre P e ρ seja $\sqrt{3}$.

Para determinar esta distância podemos proceder de duas formas. Uma é escolher qualquer ponto de ρ, por exemplo $A = (1, 0, 0)$. Então a distância d é o módulo do vetor projeção do vetor

$$\overline{AP} = (e - 1, 0, 0)$$

no vetor normal do plano ρ, $n = (1, 1, -1)$. Este vetor é

$$u = \left(\frac{\overline{AP} \cdot n}{n \cdot n}\right) n = \frac{e-1}{3}(1, 1, -1).$$

O módulo de u é

$$|u| = |e - 1|\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, por hipótese,

$$|u| = |e - 1|\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

obtemos

$$|e - 1| = 3,$$

assim

$$e = 4 \quad \text{ou} \quad e = -2.$$

Obtemos dois planos

$$\pi_1\colon x + y - z = 4 \quad \text{e} \quad \pi_2\colon x + y - z = -2.$$

A segunda é determinar o ponto M de interseção da reta ℓ que contém P e é perpendicular a ρ,

$$\ell = (e+t, t, -t),$$

e o plano ρ. A distância entre os planos é o módulo do vetor $\overline{AM}$. A reta ℓ e o plano τ se interceptam quando t verifica

$$e+t+t-(-t)=1, \quad t=\frac{1-e}{3}.$$

Logo

$$M=\left(\frac{1+2\,e}{3}, \frac{1-e}{3}, \frac{-1+e}{3}\right).$$

Temos

$$\overline{MA}=\left(\frac{e-1}{3}, \frac{-1+e}{3}, \frac{1-e}{3}\right).$$

O módulo deste vetor é

$$|\overline{MA}|=\frac{|1-e|\,\sqrt{3}}{3}.$$

Agora procedemos exatamente como no caso anterior, obtendo (obviamente!) o mesmo resultado.

(2b) Observe que a reta s é paralela ao plano ρ, para isso é suficiente ver que o vetor diretor u de s, $u=(1,1,2)$, é perpendicular ao vetor normal n do plano ρ, $n=(1,1,-1)$:

$$u\cdot n=(1,1,2)\cdot(1,1,-1)=1+1-2=0.$$

Portanto, todos os pontos de s estão à mesma distância do plano ρ. Finalmente, o ponto $(2,0,1)$ de s pertence ao plano ρ:

$$2+0-1=1.$$

Logo a reta s está contida no plano ρ, assim todos os pontos de s estão a distância 0 de ρ. Portanto temos que **não existem pontos de s a distância $\sqrt{3}$ de ρ.**

(2c) Para determinar equações paramétricas do plano ρ devemos encontrar um ponto do plano ρ, por exemplo $A=(1,0,0)$, e dois vetores v e w paralelos ao plano, isto é, perpendiculares ao vetor normal $(1,1,-1)$ do plano ρ (onde v e w não podem ser paralelos entre se).

Podemos escolher $v = (1,0,1)$ e $w = (0,1,1)$. Assim, umas equações paramétricas de ρ são

$$(1+t, s, t+s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Outras possibilidades são escolher $v = (1,1,2)$ e $w = (1,2,3)$, obtendo

$$(1+t+s, t+2\,s, 2\,t+3\,s), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

ou escolher os vetores $v = (3,1,4)$ e $w = (1,-1,0)$, obtendo

$$(1+3\,t+s, t-s, 4\,t), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Obviamente, existem outras muitas (infinitas) possibilidades para estas equações.

(2d) Para determinar a distância d entre as retas r e s primeiro escolhemos vetores diretores v de r e w de s, por exemplo

$$v = (1,2,1) \quad \text{e} \quad w = (1,-1,2)$$

e pontos $P \in r$ e $Q \in s$, por exemplo

$$P = (1,a,1) \quad \text{e} \quad Q = (0,1,0).$$

Então a distância d entre as retas r e s é

$$d = \frac{|\overline{QP} \cdot (v \times w)|}{|v \times w|}.$$

Note que

$$\overline{QP} = (1, a-1, 1)$$

e que

$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-1,-3).$$

Também temos

$$(1, a-1, 1) \cdot (5,-1,-3) = 5 - a + 1 - 3 = 3 - a$$

e

$$|v \times w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

Portanto,

$$d = \frac{|3-a|}{\sqrt{35}}.$$

Queremos que

$$d = \frac{|3-a|}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Logo

$$|3-a| = 3.$$

Assim $a = 0$ ou $a = 6$.

---

3) Considere os planos

$$\pi \colon 2\,x + z = 2, \qquad \rho \colon x - y - 2\,z = 0$$

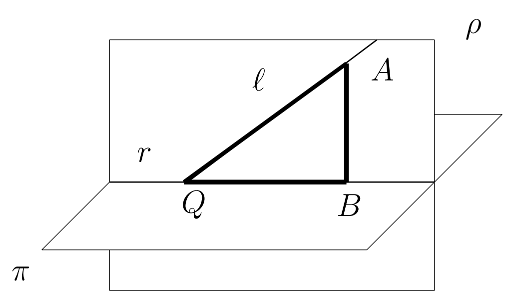
e a reta

$$\ell \colon (t+1, 1-t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considere um triângulo retângulo Δ contido no plano ρ cujos vértices são

$$Q = (1,1,0), \quad A \in \ell, \quad B \in \pi,$$

onde QA é a hipotenusa e o cateto AB é perpendicular ao plano π.



(a) Sabendo que o comprimento da hipotenusa é $2\sqrt{3}$, determine o ponto A.

(b) Determine uma equação paramétrica da reta r que contém o cateto QB.

(c) Determine o comprimento do cateto QB.

Resposta:

(3a) Como o ponto A pertence à reta ℓ (a reta que contém o ponto $Q = (1,1,0)$ e é paralela ao vetor $(1,-1,1)$) o ponto A é da forma

$$A = (1+t, 1-t, t).$$

Portanto, o vetor $\overline{QA}$ é da forma

$$\overline{QA} = (t, -t, t).$$

Queremos que

$$|\overline{QA}| = |t|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Logo $t = \pm 2$ e assim obtemos dois possíveis pontos

$$A = (3,-1,2) \quad \text{ou} \quad A = (-1,3,-2).$$

(3b) O cateto QB está contido na interseção dos planos π e ρ. Portanto, tomando vetores normais destes planos, $n = (2,0,1)$ de π e $m = (1,-1,2)$ de ρ, temos que um vetor diretor v da reta r é

$$v = n \times m = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (1,5,-2).$$

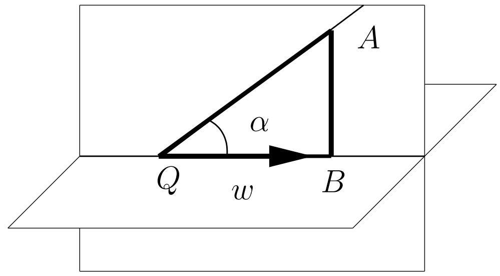
Como o ponto Q pertence à reta r obtemos que

$$r\colon (1+t, 1+5\,t, 0-2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3c) O comprimento do cateto QB é

$$|QB| = |QA| \cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado pelo cateto QB e a hipotenusa QA. Ou seja, α é o ângulo formado pelo vetor diretor $w = (1,5,-2)$ da reta r e o vetor $\overline{QA}$.



Portanto,

$$|\overline{QB}| = |\overline{QA}|\,\cos\alpha = \frac{|(1,5,-2)|\,|\overline{QA}|\,\cos\alpha}{|(1,5,-2)|} = \frac{|(1,5,-2)\cdot\overline{QA}|}{|(1,5,-2)|}.$$

Observe que $\overline{QA} = (2,-2,2)$ ou $\overline{QA} = (-2,2,-2)$. Portanto,

$$|(1,5,-2)\cdot\overline{QA}| = |(1,5,-2)\cdot(2,-2,2)| = 12.$$

Finalmente, como

$$|(1,5,-2)| = \sqrt{1^2+5^2+(-2)^2} = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30},$$

temos

$$|\overline{QB}| = \frac{12}{\sqrt{30}} = \frac{(6)\,(2)}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \frac{2\,\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Outra forma de resolver o problema é observar que B é a interseção do plano π e da reta s que contém o ponto A e é perpendicular a π. A reta s tem equações paramétricas

$$s\colon (3+2\,t, -1, 2+t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Para determinar o ponto de interseção devemos ver para que valor de t os pontos da forma $(3+2\,t,-1,2+t)$ verificam a equação do plano:

$$2\,(3+2\,t) + (2+t) = 2, \quad 5\,t = -6, \quad t = \frac{-6}{5}.$$

Portanto,

$$B = (3-12/5, -1, 2-6/5) = (3/5, -1, 4/5).$$

Finalmente, como $Q = (1,1,0)$,

$$\overline{BQ} = (2/5, 2, 4/5).$$

Temos

$$|\overline{BQ}| = |(2/5,2,4/5)| = \frac{\sqrt{2^2+10^2+4^2}}{5} = \frac{\sqrt{120}}{5} = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt{24}}{5} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}} = \frac{2\,\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$