G1 de Álgebra Linear I – 2007.1

Gabarito

---

1) Considere o ponto $P = (2, 1, 1)$ e a reta r de equações paramétricas

$$r = (1 + t, 1 - t, 2 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto P.

(b) Determine o plano ϱ perpendicular à reta r que contém o ponto P.

(c) Determine o ponto M da reta r mais próximo de P e a distância entre o ponto P e a reta r.

(d) Determine um plano τ tal que a interseção de τ e o plano π do item (a) seja exatamente a reta r.

Resposta:

(a) Observe que os pontos $P = (2, 1, 1)$ e $Q = (1, 1, 2)$ pertencem ao plano π. Portanto os vetores $\overline{QP} = (1, 0, -1)$ e $v = (1, -1, 1)$ (o vetor diretor da reta) são vetores paralelos ao plano π. Assim, um vetor normal do plano é

$$n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é da forma

$$x + 2\,y + z = d.$$

Como $(2, 1, 1) \in \pi$ temos

$$d = 2 + 2\,(1) + 1 = 5.$$

Portanto,

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 5.$$

(b) O vetor normal do plano ϱ é o vetor diretor da reta. Portanto,

$$\varrho\colon x - y + z = d.$$

Como $P \in \varrho$,

$$d = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Assim

$$\varrho\colon x - y + z = 2.$$

(c) O ponto M é a interseção da reta r e o plano ϱ. Devemos encontrar t que verifique

$$(1+t) - (1-t) + (2+t) = 2, \quad t = 0.$$

Portanto $M = (1, 1, 2)$.

A distância é o módulo de $\overline{MP} = (1, 0, -1)$, isto é,

$$\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

(d) É suficiente considerar qualquer plano que contenha a r. Portanto, seu vetor normal $n = (a, b, c)$ deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta $(1, -1, 1)$, isto é,

$$(a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = a - b + c = 0.$$

Escolhemos como vetor normal $(1, 1, 0)$. Assim

$$\tau\colon x + y = d.$$

Como $(1, 1, 2) \in \tau$ temos $d = 1 + 1 = 2$ e

$$\tau\colon x + y = 2.$$

Outras possíveis escolhas (há infinitas) para o plano τ seriam

$$\tau\colon x - z = -1, \qquad \tau\colon y + z = 3, \quad \tau\colon x + 2\,y + z = 5.$$

2) Considere

- o plano η: $x + y + z = 1$,
- os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ do plano η, e
- a reta $s = (t, 1 + 2\,t, 1 - 3\,t), \quad t \in \mathbb{R}$.

(a) Determine um ponto C do plano η tal que os pontos A, B e C determinem um triângulo retângulo de área $\sqrt{6}$ e os segmentos AB e AC sejam seus catetos.

(b) Determine um ponto N do plano η que equidiste de A e B, isto é, $|\overline{AN}| = |\overline{BN}|$.

(c) Determine um ponto T que equidiste de A e B e que **não pertença** ao plano η.

(d) Calcule a distância entre a reta s e o plano η.

(e) Considere os planos

$$\eta : x + y + z = 1, \qquad \rho : x + 2\,y + b\,z = 2, \qquad \beta : 2\,x + y + z = c.$$

Determine **b** e **c** para que a interseção dos três planos η, ρ e β seja uma reta.

Resposta:

(a) Temos que o vetor $\overline{AC}$ deve ser ortogonal a $\overline{BA} = (1, 0, -1)$ e estar contido no plano. Portanto, $\overline{AC}$ também é ortogonal ao vetor normal do plano $(1, 1, 1)$. Isto é, o vetor $\overline{AC}$ é ortogonal aos vetores $(1, 0, -1)$ e $(1, 1, 1)$, assim é paralelo ao vetor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Isto é $\overline{AC} = (t, -2\,t, t)$ para algum t.

Para determinar o valor de t usaremos que a área do triângulo é a metade do produto do comprimento dos catetos:

$$\frac{1}{2}\,|\overline{AC}|\,|\overline{BA}| = \frac{|t|\sqrt{6}\,\sqrt{2}}{2} = |t|\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

Logo

$$t = \pm\sqrt{2}.$$

Assim temos duas escolhas

$$\begin{aligned} C &= (1,0,0) + \sqrt{2}\,(1,-2,1) = (1+\sqrt{2}, -2\,\sqrt{2}, \sqrt{2}),\\ C &= (1,0,0) - \sqrt{2}\,(1,-2,1) = (1-\sqrt{2}, 2\,\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(b) O segmento AB está contido no plano. Seu ponto médio N equidista de A e B e verifica

$$\overline{AN} = \overline{NB}, \qquad N - A = B - N, \qquad N = \frac{A+B}{2}.$$

Logo

$$N = (1/2, 0, 1/2).$$

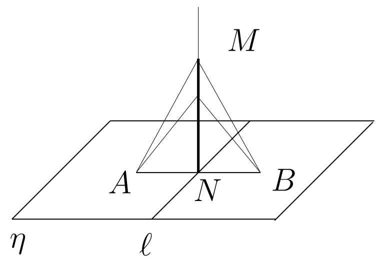
De fato v. pode verificar que todos os pontos da reta ℓ que contém o ponto N, é ortogonal a $\overline{BA}$ e está contida em η estão contidos em η e equidistam de A e de B. Veja que o vetor diretor de ℓ é paralelo a $\overline{BA} \times (1,1,1) = (1,-2,1)$. Logo a reta ℓ é da forma

$$(x,y,z) = (1/2, 0, 1/2) + (t, -2\,t, t) = (1/2 + t, -2\,t, 1/2 + t).$$

De outra forma, qualquer ponto de coordenadas

$$(a, 1 - 2\,a, a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

(c) Se consideramos a reta que contém o ponto N e é perpendicular ao plano, e consideramos qualquer ponto M da reta diferente de N (portanto M não está no plano) temos que ANM e BNM formam dois triângulos retângulos com um cateto comum (o cateto NM) e o outro cateto do mesmo tamanho (os catetos AN e NB). Logo as hipotenusas tem o mesmo comprimento.



Mas o comprimento da hipotenusa á distância entre M e A e entre M e B. Ou seja,

$$M = (1/2, 0, 1/2) + t(1, 1, 1), \quad t \neq 0.$$

Por exemplo, $M = (3/2, 1, 3/2)$.

A resposta geral é

$$(a, b, a), \quad b \neq 1 - 2\,a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(e) É suficiente escolher b e c de forma que o sistema

$$x + y + z = 1, \quad x + 2\,y + b\,z = 2, \quad 2\,x + y + z = c,$$

tenha solução e esta não seja única. Escalonando,

$$x + y + z = 1, \quad y + (b-1)\,z = 1, \quad -y - z = c - 2,$$

e

$$x + y + z = 1, \quad y + (b-1)\,z = 1, \quad (b-2)\,z = c - 2 + 1.$$

Para que o sistema tenha solução não única a última equação deve "desaparecer". Portanto, $b = 2$ e $c = 1$.

---

(3) Considere as retas

$$\begin{aligned} r &= (1+t, 1-t, 2+t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ s &= (t, 1+2\,t, 1-3\,t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \ell &= (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Determine a posição relativa das retas r e s. Se as retas forem concorrentes determine o ponto de interseção. Se as retas forem reversas calcule a distância entre elas.

b) Observe que a reta ℓ é paralela a r. Considere os pontos $E = (1, 1, 2)$ e $F = (2, 0, 3)$ de r.

Considere agora os pontos da reta ℓ

$$P_0 = (0, 0, 0), \quad P_1 = (1, -1, 1),$$

$$P_{21} = (21, -21, 21), \quad P_{333} = (333, -333, 333),$$

$$P_{4444} = (4444, -4444, 4444), \quad P_{77} = (77, -77, 77).$$

Para cada

$$i = 0, 1, 21, 333, 4444 \text{ e } 77$$

considere o triângulo Δ_i de vértices E, F e P_i.

Determine as áreas dos triangulos Δ_0, Δ_1, Δ_{21}, Δ_{333}, Δ_{4444} e Δ_{77}.

Resposta:

(a) Consideramos pontos $P = (1, 1, 2)$ de r e $Q = (0, 1, 1)$ de s e s vetor $\overline{QP} = (1, 0, 1)$. Consideramos também vetores diretores $v = (1, -1, , 1)$ de r e $w = (1, 2, -3)$ de s. Como as retas não são paralelas, temos que

$$\overline{QP} \cdot (v \times w) = \begin{cases} = 0, & \text{concorrentes;} \\ \\ \neq 0, & \text{reversas.} \end{cases}$$

Portanto, calculamos esse produto misto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\,(3 - 2) + 0 + 1\,(2 + 1) = 4.$$

Portanto as retas são reversas.

Sua distância é

$$d = \frac{|\overline{QP} \cdot (v \times w)|}{|v \times w|} = \frac{4}{|v \times w|}.$$

Temos

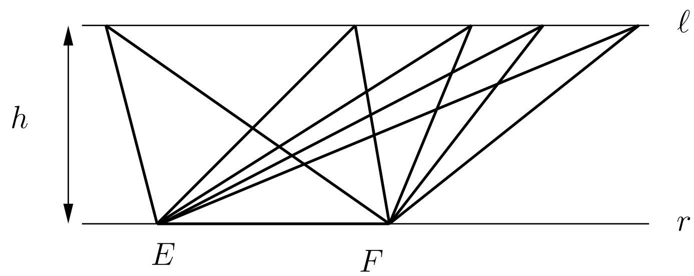
$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\, 1 + \mathbf{j}\, 4 + \mathbf{k}\, 3 = (1, 4, 3).$$

Onde $|(1,4,3)| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$. Logo

$$d = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

(b) Observamos que todos os triângulos considerados têm um lado, em comum que consideraremos como a base, o segmento EF, onde $\overline{EF} = (1, -1, 2)$. Então a altura (h) de todos os triângulos é a mesma: a distância entre as retas paralelas r e ℓ. Portanto, todos os triângulos têm a mesma área. Veja a figura.



Calcularemos, por exemplo a área de Δ_0. Temos que um lado de Δ_0 é $P_0E = (1, 1, 2)$. Portanto

$$\text{Área } (\Delta_0) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{|(3, -1, -2)|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Portanto

$$\text{Área } (\Delta_i) = \frac{\sqrt{14}}{2}, \quad i = 0, 1, 21, 333, 4444 \text{ e } 77.$$