G1 de Álgebra Linear I – 2006.2

Gabarito

---

1)

a) Considere a reta s de equação paramétrica

$$s = (t, 1-t, 1+2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os planos π_1, π_2 e π_3 cujas equações cartesianas são

$$\pi_1 \colon x+2\,y+a\,z = b, \quad \pi_2 \colon x-2\,y+c\,z = d, \quad \pi_3 \colon x+y+f\,z = g.$$

Determine **a**,**b**,**c**,**d**,**f** e **g** para que a interseção dos planos π_1, π_2 e π_3 seja a reta s.

b) Considere os planos ρ_1, ρ_2 e ρ_3 cujas equações cartesianas são

$$\rho_1 \colon x+y-z = 1, \quad \rho_2 \colon x+3\,y+z = 1, \quad \rho_3 \colon x+\alpha\,y+3\,z = \gamma.$$

Determine, explicitamente, α e γ para que a interseção dos planos ρ_1, ρ_2 e ρ_3 seja uma reta r.

c) Determine uma equação paramétrica da reta r do item anterior.

Resposta:

a) Observamos que o vetor normal $n_1 = (1, 2, a)$ do plano π_1 deve ser ortogonal ao vetor diretor $v = (1, -1, 2)$ da reta s. Portanto,

$$(1, 2, a) \cdot (1, -1, 2) = 1 - 2 + 2\,a = 0, \quad a = 1/2.$$

A reta s está contida no plano π_1, em particular, o ponto $P = (0, 1, 1)$ da reta r deve verificar a equação do plano π_1. Logo,

$$1\,(0) + 2\,(1) + 1/2\,(1) = b = 5/2.$$

Logo

$$a = 1/2, \quad b = 5/2.$$

Analogamente, o vetor normal $n_2 = (1, -2, c)$ do plano π_2 deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta s. Portanto,

$$(1, -2, c) \cdot (1, -1, 2) = 1 + 2 + 2\,c = 0, \quad c = -3/2.$$

A reta s está contida no plano π_2, em particular, o ponto $P = (0, 1, 1)$ deve verificar a equação do plano π_2. Logo,

$$1\,(0) - 2\,(1) - 3/2\,(1) = d = -7/2.$$

Finalmente, o vetor normal $n_3 = (1, 1, f)$ do plano π_3 deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta s. Portanto,

$$(1, 1, f) \cdot (1, -1, 2) = 1 - 1 + 2\,f = 0, \quad f = 0.$$

A reta s está contida no plano π_3, em particular, o ponto $P = (0, 1, 1)$ deve verificar a equação do plano π_3. Logo,

$$1\,(0) + 1\,(1) + 0\,(1) = g = 1.$$

Logo

$$f = 0, \quad g = 1.$$

b) Resolveremos o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{l} x + y - z = 1, \\ x + 3\,y + z = 1, \\ x + \alpha\,y + 3\,z = \gamma, \end{array}$$

e escolheremos α e γ de forma que o sistema seja indeterminado (com infinitas soluções). Escalonando o sistema obtemos:

$$\begin{array}{lllll} x+ & y & - & z & = & 1, \\ & 2\,y & + & 2\,z & = & 0, \\ & (\alpha - 1)\,y & + & 4\,z & = & \gamma - 1. \end{array}$$

Dividindo por 2 a segunda equação,

$$\begin{array}{llllll} x+ & y & - & z & = & 1, \\ & y & + & z & = & 0, \\ & (\alpha - 1)\,y & + & 4\,z & = & \gamma - 1. \end{array}$$

Observamos que $(\alpha - 1) \neq 0$, pois caso contrário o sistema teria solução única. Continuando o escalonamento, consideramos a última equação menos $(\alpha - 1)$ vezes a segunda, obtemos

$$\begin{array}{rrrrrr} x+ & y & - & z & = & 1, \\ & y & + & z & = & 0, \\ & & + & (4-(\alpha-1))\, z & = & \gamma - 1. \end{array}$$

Para que o sistema tenha infinitas soluções a última equação deve desaparecer. Isto é,

$$\alpha = 5, \quad \gamma = 1.$$

Outra forma de resolver o problema é observar que a interseção dos planos ρ_1 e ρ_2 é obtida usando as duas primeiras equações do escalonamento:

$$\begin{array}{rrrrrr} x+ & y & - & z & = & 1, \\ & y & + & z & = & 0, \end{array}$$

isto é, podemos escolher z como parâmetro

$$z = t,$$

obtendo

$$y = -t \quad \text{e} \quad x = 1 + 2\,t,$$

Assim obtemos a reta de interseção r

$$r = (1 + 2\,t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outra forma de obter a reta interseção é observar que um vetor diretor da reta é obtido considerando o produto vetorial dos vetores normais dos planos

$$(1, 1, -1) \times (1, 3, 1) = (4, -2, 2).$$

Ou seja, podemos escolher $(2, -1, 1)$. Também temos que $(1, 0, 0)$ é um ponto da reta.

Como a reta r está contida no plano ρ_3, o vetor normal de ρ_3 deve ser perpendicular ao vetor diretor de r:

$$(1, \alpha, 3) \cdot (2, -1, 1) = 0, \quad 2 - \alpha + 3 = 0, \quad \alpha = 5.$$

Logo ρ_3 é da forma:

$$x + 5\,y + 3\,z = \gamma.$$

Finalmente, como ponto $(1, 0, 0)$ pertence a ρ_3, obtemos $\gamma = 1$.

c) A equação paramétrica da reta r já foi obtida:

$$r = (1 + 2\,t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

2) Considere as retas

$$r_1 = (1{+}t, 2{-}t, 1{+}t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2 = (1{+}2t, 2{-}t, 1{+}2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine pontos $B \in r_1$ e $C \in r_2$ tais que os pontos $A = (1,2,1)$, B e C sejam os vértices de um paralelogramo $\mathfrak{P}$ tal que o lado AB de $\mathfrak{P}$ tenha comprimento $\sqrt{3}$ e a área de $\mathfrak{P}$ seja $2\sqrt{2}$.

b) Determine o quarto vértice D do paralelogramo $\mathfrak{P}$ do item (a).

c) Determine a equação cartesiana do plano π que contém o paralelogramo $\mathfrak{P}$.

d) Considere a reta r_3

$$r_3 = (1 + t, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine um ponto E da reta r_3 tal que os pontos A, B, C, D e E sejam os vértices de um paralelepípedo $\mathfrak{V}$ de volume 2.

Resposta:

a) Como o ponto B pertence à reta r_1 é da forma

$$B = (1 + s, 2 - s, 1 + s)$$

para algum s. Portanto,

$$\overline{AB} = (s, -s, s).$$

O módulo do vetor $\overline{AB}$ (que é o comprimento do lado AB) é $|s|\sqrt{3}$. Portanto, $s = \pm 1$. Temos duas escolhas para B,

$$B_2 = (2, 1, 2), \quad (s = 1), \qquad B_1 = (0, 3, 0), \quad (s = -1).$$

Analogamente, como o ponto C pertence à reta r_2 é da forma

$$C = (1 + 2\,s, 2 - s, 1 + 2\,s)$$

para algum s. Portanto,

$$\overline{AC} = (2\,s, -s, 2\,s).$$

Queremos que

$$\begin{aligned} |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= |(1,-1,1) \times (2\,s, -s, 2\,s)| = \\ &= |s|\,|(1,-1,1) \times (2,-1,2)| = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Temos

$$(1,-1,1) \times (2,-1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1,0,1).$$

O módulo deste vetor é $\sqrt{2}$. Portanto,

$$|s|\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \quad s = \pm 2.$$

Temos duas escolhas para C,

$$C_1 = (5,0,5), \quad (s = 2), \qquad C_2 = (-3,4,-3), \quad (s = -2).$$

b) Observamos que temos quatro escolhas possíveis para o vértice D, segundo as escolhas de B e C:

1. $B = (2,1,2)$ e $C = (5,0,5)$, neste caso $\overline{AB} = (1,-1,1)$ e $\overline{AC} = (4,-2,4)$, então

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= (d_1 - 1, d_2 - 2, d_3 - 1) = \overline{AB} + \overline{AC} = \\ &= (1,-1,1) + (4,-2,4) = (5,-3,5), \end{aligned}$$

   logo

$$D = (6,-1,6).$$

2. $B = (2,1,2)$ e $C = (-3,4,-3)$, neste caso $\overline{AB} = (1,-1,1)$ e $\overline{AC} = (-4,2,-4)$, então

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= (d_1 - 1, d_2 - 2, d_3 - 1) = \overline{AB} + \overline{AC} = \\ &= (1,-1,1) + (-4,2,-4) = (-3,1,-3), \end{aligned}$$

   logo

$$D = (-2,3,-2).$$

3. $B = (0,3,0)$ e $C = (5,0,5)$, neste caso $\overline{AB} = (-1,1,-1)$ e $\overline{AC} = (4,-2,4)$, então

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= (d_1 - 1, d_2 - 2, d_3 - 1) = \overline{AB} + \overline{AC} = \\ &= (-1,1,-1) + (4,-2,4) = (3,-1,3), \end{aligned}$$

logo

$$D = (4,1,4).$$

4. $B = (0,3,0)$ e $C = (-3,4,-3)$, neste caso $\overline{AB} = (-1,1,-1)$ e $\overline{AC} = (-4,2,-4)$, então

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= (d_1 - 1, d_2 - 2, d_3 - 1) = \overline{AB} + \overline{AC} = \\ &= (-1,1,-1) + (-4,2,-4) = (-5,3,-5), \end{aligned}$$

logo

$$D = (-4,5,-4).$$

c) O plano π contém ao paralelogramo. Portanto, contém as retas r_1 e r_2. Assim o seu vetor normal é

$$(1,-1,1) \times (2,-1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1,0,1).$$

Ou seja, é da forma

$$x - z = d.$$

Como o ponto $(1,2,1)$ pertence ao plano temos $d = 0$. Isto é

$$\pi \colon x - z = 0.$$

d) Observe que $E = (1+s,2,1)$ para certo s, logo

$$\overline{AE} = (s,0,0).$$

O vetor $\overline{AE} = (s,0,0)$ deve verificar

$$|\overline{AE} \cdot (\overline{AB} \times \overline{AC})| = 2.$$

Neste cálculo as diferentes escolhas dos vértices B, C, D é indiferente. Escolhemos $B = (2,1,2)$ e $C = (5,0,5)$.

Calcularemos primeiro $\overline{AB} \times \overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC}(1,-1,1) \times (4,-2,4) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-2,0,2).$$

Ou seja,

$$|(s,0,0) \cdot (-2,0,2)| = 2\,|s| = 2, \qquad s = \pm 1.$$

Temos duas possibilidades

$$E = (2,2,1), \quad s = 1, \qquad E = (0,2,1), \quad s = -1.$$

---

3) Considere a reta

$$r = (2\,t, 2-t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e o ponto

$$Q = (1,0,1).$$

(a) Escreva a reta r como a interseção de dois planos π e ρ (escritos na forma cartesiana) tais que π é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ (isto é, o vetor normal do plano π é ortogonal ao vetor $\mathbf{i}$) e ρ é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ (isto é, o vetor normal do plano ρ é ortogonal ao vetor $\mathbf{k}$).

(b) Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano τ que contém a reta r e o ponto Q.

(c) Determine o ponto M da reta r mais próximo do ponto Q. Calcule a distância do ponto Q à reta r.

Resposta:

a) Observe que um vetor diretor da reta r é $v = (2,-1,1)$. Como o plano π contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$, seu vetor normal é da forma

$$(2,-1,1) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,1).$$

Portanto, a equação cartesiana de π é da forma

$$\pi\colon y+z=d.$$

Finalmente, como o ponto $(0,2,1)$ da reta pertence a π obtemos $d=3$. Logo,

$$\pi\colon y+z=3.$$

Analogamente, como o plano ρ contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$, seu vetor normal é da forma

$$(2,-1,1)\times(0,0,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1,-2,0).$$

Portanto, a equação cartesiana de ρ é da forma

$$\rho\colon x+2\,y=d.$$

Finalmente, como o ponto $(0,2,1)$ da reta pertence a ρ obtemos $d=4$. Logo,

$$\rho\colon x+2\,y=4.$$

Portanto, a equação cartesiana é

$$r\colon y+z=3; \quad x+2\,y=4.$$

b) Considere o ponto $P=(0,2,1)$ da reta. Observe que os vetores $\overline{PQ}=(1,-2,0)$ e $v=(2,-1,1)$ são vetores paralelos ao plano τ. Portanto, as equações paramétricas de τ são

$$X=P+t\,v+s\,\overline{PQ}, \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Escrito em coordenadas,

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & 0 & + & 2\,t & + & s\\ y & = & 2 & - & t & - & 2\,s\\ z & = & 1 & + & t & & \end{array}, \qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Para determinar a equação cartesiana de τ observamos que o vetor normal de τ é

$$(2,-1,1)\times(1,-2,0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=(2,1,-3).$$

Logo a equação cartesiana é da forma

$$2\,x + y - 3\,z = d.$$

Como $(0,2,1)$ deve verificar a equação, temos $d = -1$. Logo

$$2\,x + y - 3\,z = -1.$$

c) Determinaremos a distância do ponta à reta usando dois métodos. Primeiro determinaremos o plano η que contém o ponto Q e é perpendicular a r. A interseção do plano η e da reta r determina o ponto M de r mais próximo de Q. A distância é o módulo do vetor $\overline{MQ}$.

O vetor normal de η é o vetor diretor de r. Logo η é da forma

$$\eta \colon 2\,x - y + z = d.$$

Como o ponto $Q = (1,0,1)$ pertence a η temos $d = 2 - 0 + 1 = 3$. Portanto,

$$\eta \colon 2\,x - y + z = 3.$$

Para determinar o ponto de interseção da reta e o plano devemos ver para que valor de t se verifica

$$2\,(2\,t) - (2 - t) + (1 + t) = 3, \quad 6\,t = 4, \quad t = 4/6 = 2/3.$$

Logo

$$M = (4/3, 4/3, 5/3).$$

temos

$$\overline{QM} = \frac{1}{3}\,(1,4,2).$$

Veja que este vetor é perpendicular ao vetor diretor de r. A distância é o módulo de $\overline{QM}$,

$$\text{distância} = |\overline{QM}| = \frac{1}{3}\,\sqrt{1 + 16 + 4} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

O segundo método para calcular a distância (que não fornece o ponto M) consiste em considerar o paralelogramo cujas arestas são os vetores v (diretor da reta) e $\overline{PQ}$. Então a distância é

$$\text{distância} = \frac{|v \times \overline{PQ}|}{|v|}.$$

Temos

$$|v| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

e

$$v \times \overline{PQ} = (2, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -3)$$

(observe que este cálculo já foi feito). Portanto, $|v \times \overline{PQ}| = \sqrt{14}$. Assim,

$$\text{distância} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} = .$$