P1 de Álgebra Linear I – 2010.2

3 de Setembro de 2010

GABARITO

Questão 1) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,2,0) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v}_2 = (0,2,1).$$

a) Determine, se possível, um vetor $\overrightarrow{w}$ tal que

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{w} = (2,-1,1) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v}_2 \times \overrightarrow{w} = (-1,1,-2).$$

b) Determine, se possível, um vetor $\overrightarrow{u}$ cujo módulo seja 5 e que seja perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ (isto é, $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{u} = 0 = \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{u}$).

c) Determine um vetor $\overrightarrow{a}$ paralelo a $\overrightarrow{v}_1$ tal que o vetor

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{a}$$

seja perpendicular a $\overrightarrow{v}_1$.

Observe que o vetor $\overrightarrow{a}$ é a *projeção ortogonal* de $\overrightarrow{v}_2$ em $\overrightarrow{v}_1$. Aconselhamos fazer uma figura.

Resposta:

(a) Suponha que $\overrightarrow{w} = (x,y,z)$. As coordenadas de $\overrightarrow{w}$ devem verificar as equações

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (2,-1,1) \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-1,1,-2).$$

Desenvolvendo os determinantes obtemos

$$(2\,z, -z, -2\,x + y) = (2, -1, 1), \qquad (2\,z - y, x, -2\,x) = (-1, 1, -2).$$

Simplificando obtemos o sistema linear

$$z = 1, \quad 2\,x - y = -1, \quad 2\,z - y = -1, \quad x = 1.$$

Este sistema tem como solução $x = 1$, $y = 3$ e $z = 1$. Portanto $\overrightarrow{w} = (1, 3, 1)$.

(b) O vetor $\overrightarrow{u}$ deve ser ortogonal aos vetores $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$. Portanto deve ser paralelo ao vetor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 2).$$

Isto é, o vetor $\overrightarrow{u}$ é da forma $t\,(2, -1, 2)$. Devemos determinar t para que o vetor tenha módulo 5:

$$\sqrt{t^2\,(4 + 1 + 4)} = 3\,|t| = 5, \quad t = \pm\frac{5}{3}.$$

Portanto

$$\overrightarrow{u} = \frac{5}{3}\,(2, -1, 2) = \left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{10}{5}\right), \quad \overrightarrow{u} = -\frac{5}{3}\,(2, -1, 2) = \left(\frac{-10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-10}{3}\right).$$

(c) Como o vetor $\overrightarrow{a}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}_1$ temos que $\overrightarrow{a} = t\,\overrightarrow{v}_1$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{b}$ deve ser perpendicular a $\overrightarrow{v}_1$ temos que

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v}_1 = (\overrightarrow{v}_2 - t\,\overrightarrow{v}_1) \cdot \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1 - t\,(\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1) = 0,$$

Portanto,

$$t = \frac{\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1} = \frac{4}{5}.$$

Temos que

$$\overrightarrow{a} = \frac{4}{5}\,(1, 2, 0).$$

Questão 2) Considere as retas r_1 e r_2 de $\mathbb{R}^3$ cujas equações paramétricas são

$$r_1\colon (1+t, 2\,t, 1-2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2\colon (a+2\,t, 1+t, 10+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

a reta r_3 de equação cartesiana

$$r_3\colon \begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+2\,z=1 \end{cases}$$

e o plano π de equação cartesiana

$$\pi\colon x+y+2\,z=4.$$

a) Determine o valor de a para que as retas r_1 e r_2 se interceptem em um ponto. Determine o ponto P de interseção das retas r_1 e r_2.

b) Determine a equação cartesiana do plano ϱ que contém as retas r_1 e r_2. (Observe que para resolver este item v. não necessita resolver o item anterior).

c) Determine equações paramétricas da reta r_3.

d) Determine o ponto Q de interseção da reta r_1 e o plano π.

Resposta:

(a) Devemos resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} 1+t &= a+2\,s, \\ 2\,t &= 1+s, \\ 1-2\,t &= 10+s. \end{aligned}$$

Somando as duas últimas equações obtemos

$$1 = 11+2\,s, \quad s=-5.$$

Portanto, substituindo na segunda equação, $t=-2$. Da primeira equação obtemos

$$1-2 = a-10, \quad a=9.$$

O ponto de interseção é obtido fazendo $t=-2$ (ou $s=-5$), obtemos

$$P=(-1,-4,5).$$

(b) Os vetores diretores das retas r_1 e r_2, $\overrightarrow{v}_1=(1,2,-2)$ e $\overrightarrow{v}_2=(2,1,1)$, respectivamente, são paralelos ao plano ϱ. Portanto são ortogonais ao vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano. Assim temos que $\overrightarrow{n}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4,-5,-3).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano ϱ é da forma

$$4\,x-5\,y-3\,z=d.$$

Como o ponto $(1,0,1)$ da reta r_1 pertence ao plano temos

$$4-3=d, \qquad d=1.$$

Logo

$$\varrho\colon 4\,x-5\,y-3\,z=1.$$

(c) Consideramos o sistema

$$x+y+z=3, \quad x-y+2\,z=1,$$

somando as quações temos $2\,x+3\,z=4$. Isto é

$$x=2-3/2\,z.$$

Escolhendo z como parâmetro temos

$$z=t, \qquad x=2-3/2\,t$$

e

$$y=3-z-x=3-t-2+3/2\,t=1+1/2\,t$$

Portanto, fazendo $t=2\,s$

$$x=2-3\,s, \quad y=1+s, \quad z=2\,s, \qquad s\in\mathbb{R}.$$

Observe que o vetor diretor da reta é $(-3,1,2)$ que é perpendicular aos vetores normais dos planos que determinam a reta r_3 (os vetores $(1,1,1)$ e $(1,-1,2)$). Observe também que o ponto $(2,1,0)$ pertence aos dois planos.

(d) Temos que verificar para que valor de t o ponto $(1+t, 2\,t, 1-2\,t)$ verifica a equação $x+y+2\,z=4$. Substituindo,

$$(1+t)+(2\,t)+2\,(1-2\,t)=4, \qquad -t+3=4, \qquad t=-1.$$

Obtemos $Q=(0,-2,3)$.

Questão 3) Considere os pontos

$$P=(1,2,0) \qquad \text{e} \qquad Q=(2,1,1),$$

a reta r cujas equações paramétricas são

$$r\colon (1+t, 2+t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e o plano ρ cuja equação cartesiana é

$$\rho\colon x+2\,y+3\,z=6.$$

a) Determine explicitamente <u>todos</u> os pontos M da reta r tal que a área do triângulo Δ de vértices P, Q e M seja 2.

b) A equação cartesiana do plano η que contém a reta r e o ponto Q.

c) Considere os pontos

$$A=(1,1,1) \quad \text{e} \quad B=(0,0,2)$$

do plano ρ. Determine um ponto C do plano ρ tal que os pontos A, B e C formem um triângulo retângulo isósceles T cujos catetos são AB e AC.

Determine a área do triângulo T. (Para responder a esta última parte do item v. não necessita resolver a primeira parte ...).

Resposta:

a) Observe que $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,1)$. Considere um ponto $X = (1+t, 2+t, 2\,t)$ da reta r e o vetor $\overrightarrow{PX} = (t,t,2\,t)$. A área do triângulo determinado pelos vértices P, X e Q é

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PX} \times \overrightarrow{PQ}\right| = (t,t,2\,t) \times (1,-1,1).$$

Temos

$$\overrightarrow{PX} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & t & 2\,t \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3\,t, t, -2\,t).$$

O módulo deste vetor é $|t|\sqrt{14}$. Portanto, para obter $X = M$ devemos escolher t tal que

$$2 = \frac{|t|\sqrt{14}}{2}, \quad t = \pm\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Portanto, há duas possibilidades para o ponto M,

$$M = \left(1+\frac{4}{\sqrt{14}}, 2+\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}\right), \qquad M = \left(1-\frac{4}{\sqrt{14}}, 2-\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{-8}{\sqrt{14}}\right).$$

b) Observe que o vetor diretor da reta $\overrightarrow{v} = (1,1,2)$ e o vetor $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,1)$ são paralelos ao plano η. Portanto, os vetores normais do plano são paralelos ao vetor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,1,-2).$$

Logo a equação cartesiana do plano η é da forma

$$\eta\colon 3\,x + y - 2\,z = d.$$

Determinamos d pela condição $Q = (2,1,1) \in \eta$:

$$6 + 1 - 2 = 5 = d.$$

Assim obtemos

$$\eta\colon 3\,x + y - 2\,z = 5.$$

c) Considere o ponto C e o vetor $\overrightarrow{AC}$. Observe que:

- como o segmento AC está contido no plano ρ o vetor $\overrightarrow{AC}$ ele é perpendicular ao vetor normal do plano $(1, 2, 3)$,
- como o segmento AC é um cateto do triângulo retângulo ele é perpendicular ao outro cateto, assim os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BA} = (1, 1, -1)$ são perpendiculares.

Portanto, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é paralelo a

$$(1, 2, 3) \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 4, -1).$$

Assim obtemos que o ponto C está na reta que contém o ponto A e é paralela ao vetor $(5, -4, 1)$. Portanto

$$C = (1 + 5\,t, 1 - 4\,t, 1 + t)$$

para algum t. Também temos que $\overrightarrow{AC} = (5\,t, -4\,t, t)$. Devemos escolher t de forma

$$|\overrightarrow{AC}| = |t|\,\sqrt{25 + 16 + 1} = |t|\,\sqrt{42} = |\overrightarrow{AB}| = |(-1, -1, 1)| = \sqrt{3}.$$

Isto é

$$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{42}} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C &= \left(1 + \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \quad \text{ou} \\ C &= \left(1 - \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{14}}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, a área dum triângulo retñagulo é o produto dos catetos divido por dois. Portanto,

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2} = \frac{3}{2}.$$