G4 de Álgebra Linear I – 2008.1

Gabarito

---

1) Verdadeiro ou falso:

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e dois autovetores distintos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de T. Então $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ também é um autovetor de T.

Falso: A soma de dois autovetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de T é um autovetor se, e somente se, os autovalores dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são os mesmos. É suficiente considerar a transformação linear cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os vetores $\overrightarrow{u} = (1,0)$ e $\overrightarrow{v} = (0,1)$ são autovetores (associados as 1 e 2), porém $\overrightarrow{w} = (1,1)$ não é um autovetor.

• Considere vetores $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$ de $\mathbb{R}^3$ que geram $\mathbb{R}^3$. Suponha que estes vetores são todos diferentes e não nulos. Então $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Falso: É suficiente considerar (por exemplo) $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,0,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (3,0,0)$, $v_4 = (0,1,0)$, $v_5 = (0,0,1)$, e, para $i \geq 6$, $\overrightarrow{v}_i = (0,i,0)$. Obviamente os vetores $v_1, \dots, v_{15}$ geram $\mathbb{R}^3$ e β não é uma base.

• Seja A uma matriz 2×2 tal que 2 e 3 são autovalores de A. Então A tem inversa A^{-1} e o traço de A^{-1} é $5/6$.

Verdadeiro: Em primeiro lugar, o determinante de A é 6 (produto dos autovalores) e portanto A possui inversa. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ autovetores de A associados a 2 e 3. Então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são autovetores de A^{-1} associados a $1/2$ e $1/3$. Como estamos em dimensão dois os autovetores de A^{-1} são exatamente

$1/2$ e $1/3$ e têm multiplicidade um. Portanto, o traço de A^{-1} é a soma destes autovalores: $1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6$.

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de T é o plano $56\,x + 217\,y + 312\,z = 0$. Então o determinante da matriz de T na base canônica é 0.

Verdadeiro: A matriz de T tem por colunas os vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Estes vetores geram a imagem de T, que é um plano. Portanto, os vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$, $T(\mathbf{k})$ são linearmente dependentes. Logo, o determinante da matriz é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores de T (contando multiplicidades), necessariamente um autovalor de T é nulo.

• As matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

Falso: A matriz N não é diagonalizável: existe no máximo um autovetor linearmente independente associado a 2 (para a matriz ser diagonalizável deveriam existir dois autovetores l.i. associados a 2).

• Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são dois vetores não-nulos de $\mathbb{R}^3$, então podemos concluir que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \neq 0$ ou $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ (ou ambos).

Verdadeiro: Seja θ o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Lembre que

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\sin\theta.$$

Há três possibilidades. Se $\theta \neq 0, \pi, \pi/2$ então $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. Se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ então $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, e se $\theta = \pi/2$ então $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.

Tabelas de respostas

- prova tipo A:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		f	
1.b		f	
1.c	v		
1.d	v		
1.e		f	
1.f	v		

- prova tipo B:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		f	
1.b	v		
1.c	v		
1.d		f	
1.e	v		
1.f		f	

- prova tipo C:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	v		
1.b	v		
1.c		f	
1.d	v		
1.e		f	
1.f		f	

- prova tipo D:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	v		
1.b		f	
1.c	v		
1.d		f	
1.e		f	
1.f	v		

---

2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \times (1,1,3).$$

Determine a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica.

Resposta: Devemos calcular $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$:

$$T(\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0,-3,1);$$

$$T(\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3,0,-1);$$

$$T(\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1,1,0);$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo B:
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- prova tipo C:
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- prova tipo D:
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Considere a base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right); \left(\frac{8}{\sqrt{234}}, \frac{7}{\sqrt{234}}, \frac{11}{\sqrt{234}}\right); \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right) \right\}.$$

(a) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w} = (7, -8, 0)$ na base β.

(b) Considere a transformação linear T determinada por

- $T(1, 2, -2) = (8, 7, 11)$,
- $T(8, 7, 11) = (0, 0, 0)$,
- $T(4, -3, -1) = (1, 2, -2)$.

Determine a matriz de T na base β.

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $T(\mathbb{R}^3)$). Lembre que

$$T(\mathbb{R}^3) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\}.$$

(d) Seja $[T]_{\mathcal{E}}$ a matriz de T na base canônica. Determine o traço de $[T]_{\mathcal{E}}$.

Resposta:

(a) Temos $(w)_\beta = (x, y, z)$ onde

$$(7, -8, 0) = x\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) + y\left(\frac{8}{\sqrt{234}}, \frac{7}{\sqrt{234}}, \frac{11}{\sqrt{234}}\right) + z\left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right).$$

Como a base é ortonormal:

$$x = (7, -8, 0) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \frac{7}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-9}{3} = -3,$$

$$y = (7, -8, 0) \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{234}}, \frac{7}{4\sqrt{234}}, \frac{11}{\sqrt{234}}\right) = \frac{56}{\sqrt{234}} - \frac{56}{\sqrt{234}} = 0,$$

$$z = (7, -8, 0) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right) \frac{28}{\sqrt{26}} + \frac{24}{\sqrt{26}}, = \frac{52}{\sqrt{26}}.$$

Logo

$$(w)_\beta = (7, -8, 0)_\beta = \left(-3, 0, \frac{52}{\sqrt{26}}\right).$$

(b) Escrevemos

$$\overrightarrow{u}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right), \quad \overrightarrow{u}_2 = \left(\frac{8}{\sqrt{234}}, \frac{7}{\sqrt{234}}, \frac{11}{\sqrt{234}}\right); \quad \overrightarrow{u}_3 = \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}\right).$$

Temos

$$\begin{aligned}
T(\overrightarrow{u}_1) &= T\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{3}(8, 7, 11) = \frac{\sqrt{234}}{3}\overrightarrow{u}_2 \\
T(\overrightarrow{u}_2) &= \frac{1}{\sqrt{234}} T(8, 7, 11) = \overrightarrow{0}, \\
T(\overrightarrow{u}_3) &= \frac{1}{\sqrt{26}} T(4, -3, -1) = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 2, -2) = \frac{3}{\sqrt{26}}\overrightarrow{u}_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{\sqrt{234}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A imagem de T é o espaço gerado pelas imagens dos vetores de uma base. No caso, considerando a base β, temos que a imagem de T é gerada pelos vetores $(8, 7, 11)$ e $(1, 2, -2)$. Portanto, a imagem de T é o plano $a\,x + b\,y + c\,z = 0$, onde (a, b, c) é perpendicular a $(8, 7, 11)$ e $(1, 2, -2)$. Sabemos que $(4, -3, -1)$ verifica essa propriedade. Logo a imagem de T tem como equação cartesiana $4\,x - 3\,y - z = 0$.

(d) A matriz $[T]_\mathcal{E}$ é semelhante à matriz $[T]_\beta$. Portanto, têm o mesmo traço. Logo o traço de $[T]_\mathcal{E}$ é 0.

---

4) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma forma diagonal de T. Em caso negativo, explique porque T não é diagonalizável.

Resposta:

(a) A matriz tem as linhas proporcionais. Portanto, o seu determinante é zero. Assim, tem um autovalor nulo (o determinante é o produto dos autovalores considerados com multiplicidades).

Calcularemos os autovetores de 0. Para isso resolvemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Obtemos o plano $x + y + z = 0$. Logo os vetores não nulos deste plano são os autovetores associados ao autovalor 0. Como a multiplicidade de um autovalor é maior ou igual que o número de autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor, a multiplicidade do autovalor 0 é dois ou três. Se a multiplicidade fosse 3 o traço da matriz seria zero. Portanto, o autovalor 0 tem multiplicidade dois e o outro autovalor é 6 (a soma dos autovalores com suas multiplicidades é o traço da matriz).

Vc. também poderia calcular o o polinômio característico de $[T]_{\mathcal{E}}$.

(b) Para que T seja diagonalizável deve possuir uma base de autovetores. Se escolhemos um autovetor associado a 6 (digamos (a, b, c), não é necessário o cálculo) e dois autovetores l.i. associados a 0 (por exemplo, $(1, -1, 0)$ e

$(1, 0, -1))$ obtemos uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Portanto, T é diagonalizável. As três formas diagonais de T são

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

---

5) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(\mathbf{j}) = (2, 3)$, $\mathbf{i}$ é um autovetor de T e o determinante de T é 4. Determine:

(a) a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica;

(b) uma forma diagonal D de T.

Resposta: A matriz de T na base canônica é

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{i}$ é um autovetor $T(1, 0) = a\,(1, 0)$. Logo,

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem determinante $4 = 3\,a$. Logo $a = 4/3$.

$$\begin{pmatrix} 4/3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como a matriz é triangular, os autovalores de T são $4/3$ e 3. Portanto, a matriz tem dois autovalores diferentes e é diagonalizável (trata-se de uma matriz 2×2). Assim as formas diagonais de T são

$$\begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo B:

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5/2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo C:

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo D:

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7/2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix}.$$