G4 de Álgebra Linear I – 2007.2

Data: 4 de dezembro de 2007.

---

1) Considere as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1 = \{(t,\, 2\,t,\, 1-t) \colon t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{(3+t,\, 5+t,\, 1+2\,t) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Determine o ponto P de interseção das retas r_1 e r_2.

b) Determine a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2.

c) Considere agora a reta

$$r_3 = \{(t, t, a+t) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Determinte **todos** os valores de a tais que as distâncias entre as retas r_1 e r_3 seja $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

---

2) Considere o vetor $w = (2, -1, 0)$ a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = v \times w.$$

a) Determine a matriz $(T)_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica.

b) Considere a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, -1, 0),\; e_2 \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, 2, 1),\; e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(1, 2, -5) \right\}$$

Determine a matriz $(T)_\gamma$ de T na base γ

c) Determine as coordenadas do vetor $(1, 2, 2)$ na base γ.

d) Determine um autovetor de T (escrito na base canônica).

3) Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que 4 é um autovalor de M, determine um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ que contenha um número máximo de autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 4.

b) Determine explicitamente **todas** as formas diagonais de M.

Observação: para calcular os autovalores de M v. não necessita calcular seu polinômio característico.

c) Determine **explicitamente** uma matriz Q e uma matriz diagonal D tais que

$$M = Q^t \, D \, Q,$$

onde D é uma matriz diagonal.

d) Observe que a matriz N é simétrica, portanto é diagonalizável, e que um dos autovalores de N é 3. Determine se existe uma matriz P tal que

$$N = P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Em caso afirmativo, determine **explicitamente** a matriz P. Em caso negativo, justifique de forma completa sua resposta.

---

4) Determine a inversa da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$