G4 de Álgebra Linear I – 2007.1

Data: 12 de junho de 2007.

---

1) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1,1,1); (1,0,1); (2,1,0)\}$$

(1.a) Determine a matriz de mudança de coordenadas da base canônica para a base η.

(1.b) Considere o vetor $v = (2,3,1)$ (escrito na base canônica). Determine as coordenadas do vetor v na base η.

---

2) Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & a & d \\ 2/3 & b & f \\ 2/3 & c & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Determine a, b, c, d e f para que E represente na base canônica um espelhamento em uma reta.

(2.b) Determine equações cartesianas e paramétricas da reta de espelhamento.

---

3) Considere o vetor $w = (1,1,2)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = v \times w = v \times (1,1,2).$$

(3.a) Determine a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ da transformação linear T na base canônica.

(3.b) Considere a base ortonormal

$$\gamma = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}); (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}); (1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30})\}.$$

Determine a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ.

(3.c) Determine explicitamente uma matriz N que verifique

$$[T]_{\mathcal{E}} = N^{-1}\,[T]_\gamma\,N.$$

(3.d) Determine a segunda coordenada do vetor $(2, 1, 1)$ na base γ.

---

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determine:

(4.a) uma base de autovetores de M,

(4.b) uma forma diagonal D de M,

(4.c) uma matriz Q tal que

$$M = Q\,D\,Q^t,$$

onde D é a matriz do item anterior,

(4.d) a equação cartesiana da imagem de M denotada $\mathrm{im}(M)$,

$$\mathrm{im}(M) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M(w) = u\}.$$

Resposta: