G4 de Álgebra Linear I – 2006.2

Data: 30 de novembro 2006

Horário: 17:05 – 18:55

Nome:______________________________ Matrícula:__________

Assinatura:____________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	0.5		
1b	1.0		
1c	1.0		
1d	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
2d	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
3c	1.0		
Total	10.5		

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear o caderno de prova.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- **Respostas e desenvolvimento a caneta**. Escreva de forma clara e legível.
- Justifique de forma clara, ordenada e completa suas respostas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- **Se v. está fazendo a prova para aumentar nota, caso v. não deseje que sua prova seja corrigida escreva claramente sua opção não corrigir no topo desta página. Caso contrário, sua prova sera corrigida e a nota lançada.**

1) Considere o plano $\pi\colon x+y+z=0$, o ponto $p=(1,1,1)$ e as retas

$$r_1=(t,1-t,t),\qquad t\in\mathbb{R}\quad \text{e}\qquad r_2=(1-t,1+t,t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Determine

(1.a) A equação paramétrica da reta r que contém o ponto p e é perpendicular a π.

(1.b) A equação cartesiana do plano ρ que contém o ponto p e é paralelo a r_1 e r_2.

(1.c) A distância entre as retas r_1 e r_2 e sua posição relativa.

(1.d) Escreva a reta r_1 como a interseção de dois planos τ e κ (escritos na forma cartesiana) tais que τ é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ (isto é, o vetor normal do plano τ é ortogonal ao vetor $\mathbf{i}$) e κ é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ (isto é, o vetor normal do plano κ é ortogonal ao vetor $\mathbf{k}$).

---

2) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que verifica

- $A(1,1,-1)=(-1,2,3)$,
- $A(1,-2,-1)=(-4,2,0)$,
- $A(1,0,1)=(2,0,2)$.

2.a) Sabemos também que

$$A(1,0,0)=(0,1,2).$$

Determine a matriz $[A]_{\mathcal{E}}$ de A na base canônica.

2.b) Considere a base ortogonal

$$\beta=\{(1,1,-1);(1,-2,-1);(1,0,1)\}$$

Determine a primeira coluna da matriz $[A]_\beta$ de A na base β.

2.c) Sabendo que o determinante de A é zero. Estude se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma forma diagonal D de A e uma base γ onde a matriz $[A]_\gamma$ de A na base γ seja diagonal.

2.d) Determine a equação cartesiana do conjunto imagem de A (isto é, do conjunto de vetores w tais que $w = A(v)$ para certo vetor v).

---

3)

3.a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e um vetor v que determina a direção de projeção.

3.b) Determine <u>explicitamente</u> a matriz de P na base canônica.

3.c) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ, onde

$$\pi\colon x + y - 2\,z = 0, \qquad \rho\colon x + y + z = 0.$$

Encontre uma matriz R tal que a matriz de T na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^t.$$

Resposta: