P4 de Álgebra Linear I – 2010.2

Data: 29 de Novembro de 2010.

Nome:________________________________ **Matrícula:**________

Assinatura:________________________________ **Turma:**________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO.

Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**3.a**	**3.b**	**soma**
V	1.0	1.0	0.5	1.0	2.0	1.0	1.0	1.5	1.0	10.0
N										

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- Escreva de forma clara, ordenada e legível.
- Justifique de forma **ordenada**, **cuidadosa** e **completa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Questão 1) Considere o plano

$$\pi\colon x + y + z = 1$$

e as retas r_1 e r_2 cujas equações paramétricas são

$$r_1 = (1 + t, 1 - t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$r_2 = (2 + t, 1 - t, 1 + 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine as equações cartesianas de **todos** os planos τ de $\mathbb{R}^3$ tais que a distância entre π e τ seja 1.

b) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém as retas r_1 e r_2.

c) Determine a distância entre as retas r_1 e r_2.

Resposta:

Questão 2) Considere as transformações lineares

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad B, C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad [B] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [C] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz $[A]$ nao é diagonalizável, que 0 é um autovalor de A e que o vetor $v = (1, 1)$ é um autovetor de A, determine a, b e c.

b) Sabendo que o vetor $(1, 1, 1)$ é um autovetor de B, determine **explicitamente** uma matriz diagonal D e matrizes P e P^{-1} tais que

$$[B] = P\, D\, P^{-1}.$$

c) Determine a equação cartesiana da imagem $\mathbb{V}$ da transformação linear C.

d) Considere o sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{v = (x, y, z)\colon x + y - z = 0\}.$$

Determine uma base ortogonal η de $\mathbb{W}$ que contenha o vetor $(0, 1, 1)$. Determine as coordenadas do vetor $(1, 2, 3)$ de $\mathbb{W}$ na base η.

Resposta:

Questão 3)

a) Determine a inversa da matriz

prova tipo A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a base

$$\beta = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (2,0,1), w_3 = (3,1,0)\}.$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$\begin{aligned} T(w_1) &= (3,1,2) = w_1 + w_2, \\ T(w_2) &= (5,1,1) = w_2 + w_3, \\ T(w_3) &= (8,2,4) = w_1 + 2\,w_2 + w_3, \end{aligned}$$

Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

Critério de correção: Um erro nos coeficientes da matriz inversa **nota 1.0**, dois erros **nota 0.5**, três ou mais erros **nota zero**. O desenvolvimento da questão é necessário. A matriz $[T]_\beta$ deve estar **totalmente** correta, caso contrário a nota desse item será **zerada**.

Escreva as resposta finais a <u>caneta</u> no retângulo.

Somente serão aceitas respostas a caneta.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad [T]_\beta = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Resposta: