G3 de Álgebra Linear I – 2012.2

Data: 1 de Dezembro de 2012.

Nome:____ Matrícula:__________
Assinatura:______________________________________ Turma:____________

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**1.e**	**1.f**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**2.e**	**2.f**	**soma**
Valor	1.5	0.5	0.5	1.0	0.5	0.5	2.0	0.5	1.0	1.0	0.5	0.5	10.0
Nota													

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.

• Escreva de forma clara, ordenada e legível.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta** no lugar a ele destinado. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!.**

• **Justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.*

fonte: mini-Aurélio

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é :

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 31 & 2 & 5 \\ 2 & 34 & 10 \\ 5 & 10 & 55 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que **todos** os vetores do plano

$$x + 2y + 5z = 0$$

são autovetores de T:

a) Determine **todos** os autovalores de T.

b) Calcule o determinante de $[T]_\varepsilon$.

c) Determine uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

d) Determine explicitamente a matriz M de mudança de base da base canônica para a base β. Determine a primeira coordenada do vetor $\vec{u} = (1, 2, 0)$ (este vetor está escrito na base canônica) na base β.

e) Determine se existe uma base γ onde a matriz de T nessa base seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix}.$$

f) Determine se existe uma base η onde a matriz de T nessa base seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 60 & 1 & 0 \\ 1 & 34 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observação: para resolver esta questão não é necessário fazer cálculos complicados e usar o polinômio característico. Obviamente, v. pode fazer esses cálculos.

Resposta:

2) Considere o plano

$$\pi : x - z = 0$$

e as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento no plano π e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano π. Lembre que

- $T(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a π e $T(\bar{w}) = -\bar{w}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a π,
- $P(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a π e $P(\bar{w}) = \bar{0}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a π.

Denotaremos por $[T]_\varepsilon$ e $[P]_\varepsilon$ as matrizes de T e P na base canônica, respetivamente.

a) Determine explicitamente matrizes S, S^{-1}, D e E tais que

$$[T]_\varepsilon = S\,D\,S^{-1} \quad \text{e} \quad [P]_\varepsilon = S\,E\,S^{-1},$$

onde S é ortogonal e D e E são diagonais.

b) Determine a primeira coluna de $[T]_\varepsilon$ na base canônica.

c) Determine a terceira coluna de $[P]_\varepsilon$ na base canônica.

d) Encontre, se possível, uma base β tal que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) Determine os autovalores e o traço da transformação linear $T^8 - 3T^2$.

f) Determine as matrizes de $[T]_\varepsilon^{100}$ e $[T]_\varepsilon^{101}$ na base canônica.

Resposta: