# P3 de Álgebra Linear I – 2008.2

**Data: 14 de Novembro de 2008.**

**1)** Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Marque sua resposta no quadro a seguir com um **x A CANETA**

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que existem vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ que verificam

$$T(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \quad \text{e} \quad T(\overrightarrow{w}) = -\overrightarrow{w},$$

isto é, $\overrightarrow{u}$ é um autovetor associado ao autovalor 1 e $\overrightarrow{w}$ é um autovetor associado ao autovalor $-1$.

Então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ é um autovetor de $T$ associado a $0 = 1 + (-1)$.

• Sejam $A$ e $B$ duas matrizes $2 \times 2$ que têm o mesmo traço, o mesmo determinante e o mesmo polinômio característico. Então as matrizes $A$ e $B$ são semelhantes.

• Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ não inversível tal que 1 e 2 são autovalores de $A$. Então o traço de $A$ é 3.

• Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ diagonalizável. Então existe a matriz inversa $A^{-1}$ de $A$.

• As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são semelhantes.

---

**2)**
**Prova Tipo A:**

**a)** Considere a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right), \left( \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$

Determine a primeira coordenada do vetor

$$\overrightarrow{w} = (2, 3166, 1)$$

na base $\beta$.

Observação: as coordenadas dos vetores da base $\beta$ e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

**b)** Determine a inversa $M^{-1}$ da matriz $M$,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo B:**

**a)** Considere a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right), \left( \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}} \right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$

Determine a primeira coordenada do vetor

$$\overrightarrow{w} = (1, 5166, 2)$$

na base $\beta$.

Observação: as coordenadas dos vetores da base $\beta$ e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

**b)** Determine a inversa $M^{-1}$ da matriz $M$,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo C:**

**a)** Considere a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$

Determine a primeira coordenada do vetor

$$\overrightarrow{w} = (1, 4166, 3)$$

na base $\beta$.

Observação: as coordenadas dos vetores da base $\beta$ e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

**b)** Determine a inversa $M^{-1}$ da matriz $M$,

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{11}} & \dfrac{3}{\sqrt{11}} & \dfrac{1}{\sqrt{11}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{22}} & \dfrac{-2}{\sqrt{22}} & \dfrac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo D:**

**a)** Considere a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right), \left( \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}} \right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^3$

Determine a primeira coordenada do vetor

$$\overrightarrow{w} = (5, 1, 7166)$$

na base $\beta$.

Observação: as coordenadas dos vetores da base $\beta$ e do vetor $\overrightarrow{w}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$.

**b)** Determine a inversa $M^{-1}$ da matriz $M$,

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{11}} & \dfrac{3}{\sqrt{11}} & \dfrac{1}{\sqrt{11}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{22}} & \dfrac{-2}{\sqrt{22}} & \dfrac{3}{\sqrt{22}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**3)** Calcule a inversa da matriz $A$,

**Prova Tipo A:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo B:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo C:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Prova Tipo D:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**4)**

**a)** Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v) = v \times (1,1,1).$$

Determine a matriz de $T$ na base

$$\eta = \{(1,1,1), (1,0,-1), (1,-2,1)\}.$$

**b)** Determine **explicitamente** duas matrizes **não** diagonalizáveis $B$ e $C$ **(diferentes** $B \neq C$**)** tais que seus polinômios característicos sejam

$$p_B(\lambda) = p_C(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(C - \lambda I) = (3-\lambda)^3.$$

---

**5)** Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

**a)** Determine uma base $\beta$ de autovetores de $T$.

**b)** Determine a matriz $E$ de $T$ na base $\beta$.

**c)** Encontre a matriz $P$ de mudança de base da base de autovetores $\beta$ para a base canônica.