Prova tipo A

G3 de Álgebra Linear I – 2008.1

Data: 13 de Junho de 2008.

Nome:_______________________________________ Matrícula:__________
Assinatura:___________________________________ Turma:____________

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1**	**2**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**3.d**	**3.e**	**4.a**	**4.b**	**4.c**	**5**	**soma**
Valor	2.0	1.5	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	10.5
Nota												
Rev.												

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.

• Escreva de forma clara, ordenada e legível.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta** no lugar a ele destinado. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!.**

• **Nas questões 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.*

fonte: mini-Aurélio

Marque no quadro as respostas da primeira questão.
Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃO
Resposta errada vale ponto negativo!
Esta questão pode ter nota negativa!

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **COM CANETA** sua resposta no quadro a seguir.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

Atenção: responda **todos** os itens, use "N= não sei"caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.4, respostas erradas têm pontuação negativa de acordo com a seguinte tabela progressiva:

Número de respostas erradas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pontos negativos	0	0.2	0.8	1.2	1.5

Cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas serão consideradas erradas.

1.a) Considere A e B duas matrizes 3×3 tais que existe uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ que são simultaneamente autovetores de A e de B. Então as matrizes A e B são semelhantes.

1.b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversível e denote por T^{-1} a sua inversa. Se $\overrightarrow{u}$ é um autovetor de T então $\overrightarrow{u}$ também é um autovetor de T^{-1}.

1.c) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversível e denote por T^{-1} a sua inversa. Se λ é um autovalor de T então λ também é um autovalor de T^{-1}.

1.d) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Existe uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que M é a *matriz de mudança de base,* da base canônica à base β.

1.e) Seja A uma matriz 3×3 cujo polinômio característico é $(1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Então a matriz A é semelhante à matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Critério de correção: Um erro nos coeficientes da inversa **nota 1.0**, dois erros **nota 0.5**, três ou mais erros **nota zero**. O desenvolvimento da questão é necessário.

Escreva a resposta final a caneta no retângulo

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

Desenvolvimento. Resposta:

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine, se possível, uma base de autovetores de T.

(c) Considere a matriz $N = ([T]_{\mathcal{E}})^5$. Determine o traço de N.

(d) Determine se existe uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se a base γ existir determine-a explicitamente. Caso não exista tal base explique claramente os motivos.

(e) Determine se existe uma base η de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base η seja

$$[T]_{\eta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a base η existir determine-a explicitamente. Caso não exista tal base explique claramente os motivos.

Resposta:

4) Considere a base α de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}.$$

a) Mostre que α é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(2, 4, 1)$. Determine a segunda coordenada do vetor $\overrightarrow{v}$ na base α.

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base α.

Resposta:

5) Considere a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo que 3 e 2 são autovalores da matriz A, que o vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ é um autovetor de A e que seu traço é 6. Determine **a**, **b** e **c**.

Não é necessário justificar esta questão.

Critério de correção: Cada item correto vale 0.3, todos os itens corretos 1.0.

Escreva as respostas a caneta no retângulo

$\mathbf{a} =$	$\mathbf{b} =$	$\mathbf{c} =$

Cálculos: