G3 de Álgebra Linear I – 2007.2

1) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de T e seus autovetores correspondentes.

Considere as bases β e η de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\},$$

$$\eta = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}.$$

b) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

c) Determine a segunda coluna da matriz $[T]_\eta$ de T na base η.

d) Encontre, se possível uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine explicitamente **todas** as formas diagonais de M.

b) Determine uma base ortonormal de M formada por autovetores de M.

c) Determine **explicitamente** uma matriz Q tal que

$$M = Q^t\, D\, Q$$

onde D é uma matriz diagonal.

---

3)

(a) Considere o vetor $u = (9, -6, -5)$ e a transformação linear T cuja matriz $[T]$ na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{4}{\sqrt{42}} & \dfrac{-1}{\sqrt{42}} & \dfrac{-5}{\sqrt{42}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{14}} & \dfrac{3}{\sqrt{14}} & \dfrac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Determine o módulo do vetor $T(u)$.

(b) Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{3}} & \dfrac{-4}{\sqrt{3}} & \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{16}{\sqrt{42}} & \dfrac{-4}{\sqrt{42}} & \dfrac{-20}{\sqrt{42}} \\ \\ \dfrac{8}{\sqrt{14}} & \dfrac{12}{\sqrt{14}} & \dfrac{4}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{4}{\sqrt{42}} & \dfrac{-1}{\sqrt{42}} & \dfrac{-5}{\sqrt{42}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{14}} & \dfrac{3}{\sqrt{14}} & \dfrac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

(c) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P. Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção w de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$