G3 de Álgebra Linear I – 2007.1

Data: 4 de junho de 2007.

---

1) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.a) Determine os autovalores da matriz $[T]$.

(1.b) Determine os autovetores associados aos autovalores de T.

(1.c) Encontre, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base β, $[T]_\beta$, seja

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} a & d & e \\ b & 1/3 & f \\ c & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Ache a, b, c, d, e e f para que E represente na base canônica um espelhamento (ortogonal) em relação a um plano.

(2.b) Determine a equação cartesiana do plano de espelhamento do item (2.a).

---

3) Considere os vetores

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,0,1), \quad v_3 = (0,1,1),$$

a base

$$\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot v_3)\, v_1 - (v \cdot v_3)\, v_2.$$

(3.a) Determine a matriz $[T]_\gamma$ da transformação linear T na base γ.

(3.b) Considere a matriz $[T]_\mathcal{E}$ da transformação linear T na base canônica. Determine explicitamente uma matriz N que verifique

$$[T]_\mathcal{E} = N\,[T]_\gamma\,N^{-1}.$$

(3.c) Estude se a transformação linear T é diagonalizável, em caso afirmativo determine sua forma diagonal.

---

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o determinante de M é zero e que 12 é um autovalor de M, determine:

(4.a) uma forma diagonal D de M,

(4.b) uma matriz Q tal que

$$M = Q\,D\,Q^t.$$
