G3 de Álgebra Linear I – 2006.2

Data: 21 de novembro 2006

Horário: 17:05 – 18:55

Nome:________________________________ Matrícula:__________

Assinatura:____________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	0.5		
1d	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	0.5		
3b	1.0		
3c	1.0		
3d	1.0		
Total	10.0		

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear o caderno de prova.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- **Respostas a caneta**. Escreva de forma clara e legível.
- Justifique de forma clara, ordenada e completa suas respostas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1.a) Determine os autovalores de A e suas multiplicidades.

(1.b) Para cada autovalor λ de A determine o número máximo de autovetores linearmente independentes que existem e mostre um conjunto de tais autovetores.

(1.c) Decida se A é diagonalizável. Em caso afirmativo determine uma forma diagonal D de A.

(1.d) Encontre, se possível, uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de A na base β seja

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

2) Seja $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz $[A]$ na base canônica é ortogonal, onde

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Considere a base ortonormal γ de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\}$$

Suponha que

$$\begin{aligned} A(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) &= (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \\ A(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) &= (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

2.a) Sabendo que o determinante de $[A]$ é -1, determine a matriz $[A]_\gamma$ de A na base γ.

2.b) Determine o elemento $a_{2,2}$ da matriz $[A]$.

2.c) Determine a terceira coordenada do vetor $(1, 1, 0)$ na base γ.

Resposta:

3) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor e que $(1, 1, 1)$ é um autovetor de M:

(3.a) Determine os autovalores de M.

(3.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(3.c) Escreva M da forma $M = P\,D\,P^t$, onde D é uma matriz diagonal (uma forma diagonal de M).

(3.d) Determine o determinante de M e o valor absoluto do determinante de P.

Resposta: