G3 de Álgebra Linear I – 2006.1

---

1) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz M tem determinante 0 e $(1, 0, -1)$ é um autovetor de M.

(a) Determine os autovalores de M.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de M.

(c) Determine uma forma diagonal D de M.

(d) Determine explicitamente matrizes P e P^{-1} tais que

$$M = P\,D\,P^{-1}.$$

(e) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é M.

Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 0$$

Determine <u>explicitamente</u> a matriz da composição $L \circ T$ na base canônica.

---

2) Considere a transformação linear $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[N]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de N.

(b) Para cada autovalor λ de N determine seus autovetores.

(c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de N na base γ seja

$$[N]_\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Considere a matriz

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano

$$\pi\colon x + y = 0$$

sejam autovetores da matriz F e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor.

---

3) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz Q tal que a matriz produto

$$D = Q^t\, B\, Q$$

seja diagonal.

---

4) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que é a composição de uma projeção ortogonal em um plano e uma rotação. Sabendo que a matriz de T na base canônica é escrita como o produto

- Prova tipo A:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

- Prova tipo B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

- Prova tipo C:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Prova tipo D:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Determine

- a equação cartesiana do plano de projeção;
- a equação paramétrica do eixo de rotação.

Observe que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
