G3 de Álgebra Linear I – 2013.1

Data: 21 de junho de 2013.

Nome:____ Matrícula:____________
Assinatura:____ Turma:______________

Duração: 1 hora 50 minutos

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com algum dos campos matrícula, assinatura ou turma não preenchido ou preenchido de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Ques.	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**1.e**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**2.e**	**3.a**	**3.b**	**soma**
Valor	0.5	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	10.0
Nota													

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- Escreva de forma clara, ordenada e legível.
- O desenvolvimento de cada questão deve estar após a palavra **Resposta** no lugar a ele destinado. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!.**
- **Justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.*

fonte: mini-Aurélio

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que

$$\det([T - \lambda I]_\varepsilon) = p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

(onde I representa a matriz identidade e det significa o determinante). Determine:

(a) Todos os autovetores de T (escritos na base canônica) associados ao autovalor 2.

(b) Encontre, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

(c) Encontre, se possível, uma base γ (escrita na base canônica) de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Encontre, se possível, a matriz de mudança de base da base γ para a base canônica.

(e) Encontre, se possível, uma base η (escrita na base canônica) de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base η seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

2) Considere o espelhamento em relação a um plano $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é da forma

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a, b, c, d, e e.

b) Determine a equação cartesiana do plano de espelhamento de Q.

c) Determine explicitamente as matrizes:

$$[Q]^{1000} + [Q]^{1002} \qquad \text{e} \qquad [Q]^{1005} - [Q]^{1001}.$$

d) Considere a transformação linear $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $[M]$ na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determine todos os autovalores de M e as coordenadas (na base canônica) de um autovetor de M associado ao autovalor 3.

e) Considere uma matriz 3×3 $[S]$ inversível com inversa $[S]^{-1}$ e a matriz

$$[N] = [S]\,[M]^2\,[S]^{-1}.$$

Determine o traço de $[N]$.

Resposta:

3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) Decida se a matriz A é diagonalizável. Se a sua resposta for afirmativa, encontre matrizes S e D tais que

$$S^{-1}\,A\,S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

b) Considere a matriz:

$$E = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

Mostre que $(S\,E\,S^{-1})^2 = A$.

Resposta: