P3 de Álgebra Linear I – 2010.2

Data: 22 de Novembro de 2010.

Nome:________________________________ **Matrícula:**______

Assinatura:____________________________ **Turma:**________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO.

Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Q	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.a**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**3.a**	**3.b**	**soma**
V	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	10.0
N											

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- **Verifique**, **revise** e **confira** cuidadosamente suas respostas.
- Escreva de forma clara, ordenada e legível.
- Justifique de forma **ordenada**, **cuidadosa** e **completa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Questão 1) Considere as transformações lineares

$$A, B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad [B] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad [C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz $[A]$ nao é diagonalizável e que o vetor $v = (1, 1)$ é um autovetor de A, determine os valores de a e b.

b) Determine todos os autovalores de C.

c) Determine uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de C.

d) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de B na base γ seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

Questão 2) Considere a base ortonormal γ de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

a) Considere o vetor v cujas coordenadas na base canônica são $(257, 257, 257)$. Determine a primeira coordenada do vetor v na base γ.

Considere as transformações lineares

$$T, L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base γ são, respetivamente,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [L]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Determine **<u>explicitamente</u>** a matriz de T na base canônica.

c) Determine uma base η de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da transformação linear T (escritos na base canônica).

d) Seja $[L]$ a matriz da transformação linear L na base canônica. Determine todos os autovalores da matriz $[L]$.

Resposta:

Questão 3)

a) Determine a inversa da matriz

prova tipo A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = 3\,v$$

e a base

$$\beta = \{(1,1,1), (2,0,1), (3,1,0)\}.$$

Determine a matriz de T na base β, que denotaremos por $[T]_\beta$.

Critério de correção: Um erro nos coeficientes da matriz inversa **nota 1.0**, dois erros **nota 0.5**, três ou mais erros **nota zero**. O desenvolvimento da questão é necessário. A matriz $[T]_\beta$ deve estar **totalmente** correta, caso contrário a nota desse item será **zerada**.

Escreva as resposta finais a caneta no retângulo.

Somente serão aceitas respostas a caneta.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \qquad [T]_\beta = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Resposta: