P2 Álgebra Linear I – 2008.2

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

• Se $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependente então se verifica $\overrightarrow{v}_1 = \sigma\, \overrightarrow{v}_2$ para algum número real σ.

• Considere os subespaços vetorias de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{V} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \colon x - y - z = 0\}, \qquad \mathbb{U} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \colon x + y - z = 0\},$

e uma transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbb{V}) = \mathbb{U} \quad \text{e} \quad T(\mathbb{U}) = \mathbb{V}.$$

A imagem de T é todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

• Considere as retas r_1 que contém o ponto P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ e a reta r_2 que contém o ponto Q e é paralela ao vetor $\overrightarrow{w}$. Se

$$\overline{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0$$

então as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

• Considere os planos

$$\pi \colon x + y + z = 1, \qquad \rho \colon x + y + z = 0.$$

A distância entre π e ρ é 1.

• A transformação

$$T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (|x|, y),$$

verifica $T(0,0) = (0,0)$ e é linear.

---

2)

Prova tipo A:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,1), \overrightarrow{u}_2 = (2,1,1), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (4,1,2)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_{\beta} = (2,1,1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ verificam $x + y + z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1,1,2),(0,1,1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (3,1,4)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_{\gamma}$ do vetor $\overrightarrow{v} = (3,1,4)$ na base γ.

Prova tipo B:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (0,1,1), \overrightarrow{u}_2 = (1,2,1), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (1,4,2)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta = (1,2,1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ verificam $x - y + z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x + y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1,1,2), (1,0,1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (1,3,4)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{v} = (1,3,4)$ na base γ.

Prova tipo C:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,1), \overrightarrow{u}_2 = (1,1,2), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (2,1,4)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_{\beta} = (1,1,2)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ verificam $x - y + z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(2,1,1),(1,1,0)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (4,1,3)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_{\gamma}$ do vetor $\overrightarrow{v} = (4,1,3)$ na base γ.

Prova tipo D:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,1,0), \overrightarrow{u}_2 = (2,1,1), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (4,2,1)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_{\beta} = (2,1,1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ verificam $x - y - z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y + z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4, 1)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4, 1)$ na base γ.

---

3) Considere uma base $\beta = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Prove que

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3\}$$

também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Suponha que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta = (1, 2, 1).$$

Determine as coordenadas de $(\overrightarrow{v})_\gamma = (y_1, y_2, y_3)$ de $\overrightarrow{v}$ na base γ.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y - z = 0\}$$

e o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine uma base ϱ de $\mathbb{W}$ tal que as coordenadas $(\overrightarrow{u})_\varrho$ de $\overrightarrow{u}$ na base ϱ sejam $(\overrightarrow{u})_\varrho = (2, 0)$ (as coordenadas dos vetores da base ϱ devem estar escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

4) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica

$$T(1,1,0) = (2,2,1), \quad T(1,0,1) = (3,4,2), \quad T(0,1,1) = (3,2,1).$$

a) Determine a matriz de T na base canônica.

b) Determine o conjunto $\mathbb{U}$ de vetores $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ que verificam

$$T(\overrightarrow{w}) = (2,2,2).$$

c) Determine a imagem $\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3))$ de T,

$$\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3)) = \{\overrightarrow{v} \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{w})\}.$$