Duração: 1 hora 50 minutos

G2 de Álgebra Linear I – 2006.2

Data: 16 de outubro de 2006.

Questão	Valor	Nota	Revis.
1a	1.0		
1b	1.0		
1c	0.5		
1d	1.0		
2a	1.5		
2b	1.0		
2c	0.5		
3a	1.5		
3b	1.0		
4	1.5		
Total	10.5		

---

1)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,2,1); (a,0,1); (0,b,c)\}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor $u = (3,4,3)$ na base β são

$$(u)_\beta = (1,1,1),$$

determine a, b e c.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_3, u_1 + u_2, u_2 + u_3\}$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (1,1,1),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine a equação cartesiana do sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ gerado pelos vetores

$$\{(1,2,1);(1,0,1);(1,6,1);(4,4,4);(5,5,5);(6,6,6)\}.$$

(d) Considere o plano ρ de equação cartesina

$$\rho\colon x - 2\,y + z = 0$$

e sua base

$$\gamma = \{(1,0,-1);(1,1,1)\}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\ell = (2,3,4)$ na base γ.

---

2) Considere os vetores $(1,0,2)$ e $(-2,1,1)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = (-2,1,1) \times \big(v \times (1,0,2)\big).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

(c) Determine explicitamente dois vetores não nulos e u e w de $\mathbb{R}^3$ tais que $u \neq w$ e verificam

$$T(u) = T(w) = (-2,0,-4).$$

(3)

a) Considere as retas

$$r_1 = (t, 0, 2\,t), \quad r_2 = (t, t, t), \quad r_3 = (t, t, 0),$$

e as retas

$$s_1 = (0, 3\,t, 8\,t), \quad s_2 = (0, 3\,t, 6\,t), \quad s_3 = (t, 2\,t, 3\,t).$$

Determine a matriz de uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica, simultaneamente,

$$T(r_1) = s_1, \quad T(r_2) = s_2, \quad \text{e} \quad T(r_3) = s_3.$$

b) Considere as retas (paralelas às consideradas anteriormente)

$$r_1' = (1+t, 1, 1+2\,t), \quad r_2' = (1+t, 1+t, 1+t), \quad r_3' = (1+t, 1+t, 1),$$

e as retas

$$s_1' = (0, 1{+}3\,t, 2{+}8\,t), \quad s_2' = (0, 1{+}3\,t, 2{+}6\,t), \quad s_3' = (t, 1{+}2\,t, 2{+}3\,t).$$

Determine a forma matricial de uma transformação afim

$$S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica, simultaneamente,

$$S(r_1') = s_1', \quad S(r_2') = s_2', \quad \text{e} \quad S(r_3') = s_3'.$$

4) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Critério de correção: um erro nota 0.5; dois ou mais erros nota 0.
