P2 de Álgebra Linear I – 2013.1

17 de maio de 2013.

Nome:________________________________ Matrícula:__________
Assinatura:____________________________ Turma:__________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**1.d**	**1.e**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**3.a**	**3.b**	**3.c**	**4**	**soma**
Valor	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	10.5
Nota													

Instruções – leia atentamente

• Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.

• É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.

• O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.

• Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(1,1,0) = (2,2,0),$$
$$T(0,1,1) = (1,0,0),$$
$$T(0,1,0) = (1,1,0).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine uma base ortogonal da imagem de T. Lembre que

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

(c) Encontre todos os vetores $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(\vec{u}) = (0,0,0).$$

(d) Decida se a transformação linear T é injetora. Decida se a transformação linear T é sobrejetora. Justifique cuidadosamente.

(e) Considere o triângulo $\triangle$ de vértices

$$(1,-1,0), \quad (1,3,4), \quad (0,4,0).$$

Determine se a imagem $T(\triangle)$ de $\triangle$ pela transformação T é um triângulo ou um segmento. Se for um triângulo calcule sua área e se for um segmento calcule seu comprimento.

Resposta:

2) Considere as transformações lineares S, $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$\begin{aligned} S(1,1,0) &= (1,0,0), \\ S(0,1,1) &= (0,1,0), \\ S(0,1,0) &= (0,0,1), \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad M(x,y,z) = (x, y-x, 0)$$

(a) Determine a matriz $[M \circ S]$ da composição $M \circ S$ na base canônica.

(b) Determine se S e M possuem inversas. Em caso afirmativo determine as matrizes das suas inversas $[S^{-1}]$ e $[M^{-1}]$ na base canônica.

(c) Determine todos os vetores não nulos tais que $S(\vec{u}) = S^{-1}(\vec{u})$

Resposta:

3) Considere a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

cujo o polinômio carcterístico é

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

(a) Determine o valor de a.

(b) Determine os autovalores da matriz $[T]$ e os autovetores associados.

(c) Determine, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Determine a primeira coordenada do vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ (escrito na base canônica) na base β.

Resposta:

4) Considere a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Determine, se possível, valores para a e b tais que a matriz T represente (na base canônica) a projeção no plano de equação cartesiana $y - z = 0$. Determine a direção da projeção.

Resposta: