G1 de Álgebra Linear I – 2008.2

Data: 3 de Setembro de 2008.

---

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

1.a) Existem vetores não nulos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que vale a relação
$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = 2\,\overrightarrow{w}.$$

1.b) Para todo par de vetores não nulos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ ortogonais entre si, isto é $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, existe um vetor $\overrightarrow{n}$ tal que
$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}.$$

1.c) Considere vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que
$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}) = 0.$$
Então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ têm o mesmo módulo (norma).

1.d) Considere vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que seus módulos (normas) verificam
$$|\overrightarrow{w}| = 1, \quad |\overrightarrow{v}| = 4, \quad \text{e} \quad |\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}| = 4.$$
Então $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

1.e) Considere os pontos $A = (1,3,1)$, $B = (1,2,2)$ e qualquer ponto C na reta
$$(1,3,2) + t(0,1,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$
A área do triângulo de vértices A, B e C é $1/2$.

2)

Prova tipo A:

a) Considere a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (1-t, 1+t, 2)$$

e o plano π de equações cartesianas

$$\pi\colon x + 2\,y + 3\,z = 1.$$

Calcule as coordenadas do ponto P de interseção da reta r e o plano π.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 3) \cdot \big((1,2,1) \times (1,1,0)\big) = 5.$$

c) Determine o valor de a para que os planos

$$\pi\colon x - y + 2\,z = 1, \quad \rho\colon x + y + z = 1, \quad x - 7\,y + a\,z = 1$$

se interceptem ao longo de uma reta.

d) Determine um vetor diretor $\overrightarrow{v}$ da reta r cujas equações cartesianas são

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2\,x + y + 2\,z = 5. \end{cases}$$

e) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x - 3\,y + z = 1, \qquad \rho\colon x + 2\,y + 2\,z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(1, 1, 2)$.

Prova tipo B:

a) Considere a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (1+t, 1-t, 2)$$

e o plano π de equações cartesianas

$$\pi\colon 2\,x + y + 3\,z = 1.$$

Calcule as coordenadas do ponto P de interseção da reta r e o plano π.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 3) \cdot \big((1, 2, 1) \times (1, 1, 0)\big) = 4.$$

c) Determine o valor de a para que os planos

$$\pi\colon x - y + 2\,z = 1, \quad \rho\colon x + y + z = 1, \quad a\,x - 7\,y + 5\,z = 1$$

se interceptem ao longo de uma reta.

d) Determine um vetor diretor $\overrightarrow{v}$ da reta r cujas equações cartesianas são

$$r\colon \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2\,x + y + 2\,z = 5. \end{cases}$$

e) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x - 3\,y + z = 2, \qquad \rho\colon x + 2\,y + 2\,z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(2, 1, 1)$.

Prova tipo C:

a) Considere a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (2, 1+t, 1-t)$$

e o plano π de equações cartesianas

$$\pi\colon 3\,x + 2\,y + z = 1.$$

Calcule as coordenadas do ponto P de interseção da reta r e o plano π.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 3) \cdot \big((1, 2, 1) \times (1, 1, 0)\big) = 6.$$

c) Determine o valor de a para que os planos

$$\pi\colon x - y - 2\,z = 1, \quad \rho\colon x + y + z = 1, \quad x - 7\,y + a\,z = 1$$

se interceptem ao longo de uma reta.

d) Determine um vetor diretor $\overrightarrow{v}$ da reta r cujas equações cartesianas são

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2\,x + y - 2\,z = 5. \end{cases}$$

e) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x - 3\,y + z = 0, \qquad \rho\colon x + 2\,y + 2\,z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(2, 2, 2)$.

Prova tipo D:

a) Considere a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (1 - t, 2, 1 + t)$$

e o plano π de equações cartesianas

$$\pi\colon x + 3\,y + 2\,z = 1.$$

Calcule as coordenadas do ponto P de interseção da reta r e o plano π.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 3) \cdot \big((1, 2, 1) \times (1, 1, 0)\big) = 1.$$

c) Determine o valor de a para que os planos

$$\pi\colon x - y - 2\,z = 1, \quad \rho\colon x + y + z = 1, \quad x + 7\,y + a\,z = 1$$

se interceptem ao longo de uma reta.

d) Determine um vetor diretor $\overrightarrow{v}$ da reta r cujas equações cartesianas são

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2\,x + y - 2\,z = 5. \end{cases}$$

e) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x + 3\,y + z = 7, \qquad \rho\colon x - 2\,y + 2\,z = k.$$

Determine k para que a interseção dos planos seja uma reta que passa pelo ponto $(1, 1, 2)$.

Não é necessário justificar esta questão.

Critério de correção: Cada resposta correta vale **0.6**.

Somente serão aceitas respostas <u>TOTALMENTE</u> corretas.

---

3) Considere a reta r_1 de equações paramétricas

$$r_1\colon (2\,t, 1 + t, -1 - t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e a reta r_2 de equações cartesianas

$$x + 2y - 2z = 1, \quad x - y = 2.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos π e ρ (escritos em equações cartesianas) tais que π seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

b) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 - reversas, paralelas ou concorrentes (se interceptam).

d) Considere o ponto $P = (0, 1, -1)$ da reta r_1. Encontre **<u>todos</u>** os pontos Q da reta r_1 tal que a distância entre P e Q seja $2\sqrt{6}$ (isto é, de forma que o comprimento do segmento PQ seja $2\sqrt{6}$).

4)

a) Considere os planos

$$\pi\colon 2\,x-3\,y+2\,z=1, \qquad \tau = a\,x-12\,y+c\,z=d.$$

Se possível, determine **a**, **c** e **d** para que a interseção dos planos seja:

i) o conjunto vazio (ou seja, os planos não se interceptam), isto é $\pi\cap\tau=\emptyset$,

ii) um ponto P (ou seja, a intereseção dos planos é exatamente em um ponto), isto é, $\pi\cap\tau=\{P\}$,

iii) uma reta r.

Considere agora os pontos $A=(1,0,1)$, $B=(0,2,2)$ e $C=(2,1,2)$.

b) Determine uma equação cartesiana do plano ρ que contém os pontos A, B e C.

c) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.