P1 de Álgebra Linear I – 2004.2 (02/09/04)

Prova tipo D. Respostas

---

1) Considere os vetores $\bar{v} = (1, 0, 1)$ e $\bar{w} = (-1, 1, 1)$.

a) Determine um vetor $\bar{a}$ de módulo igual a $\sqrt{6}$ tal que $\bar{a} \times \bar{v} = \bar{w}$.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (-1, 1, 1)) = 5.$$

c) Determine o valor de d para que se verifique a igualdade

$$(1, d, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (-1, 1, 1)) = (1, d, 2) \cdot ((-1, 1, 1) \times (1, 0, 1)).$$

Respostas:

a) $\bar{a} = (1, -1, 2)$ ou $\bar{a} = (-2, -1, -1)$

b) $c = -2$

c) $d = 1/2$

2) Considere o ponto $P = (1, 1, 0)$ e a reta r e o plano π de equações

$$r\colon (1+t, t, 2-t) \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \pi\colon x - y + z = 1.$$

a) Determine o ponto Q da reta r mais próximo de P.

b) Determine a distância d entre o ponto P e a reta r.

c) Determine um ponto A de r tal que a distância entre P e A seja $\sqrt{14}$.

d) Determine o ponto B da reta r tal que B, P e o ponto $(1, 0, 2)$ da reta r sejam os vêrtices de um triângulo de área $\sqrt{6}$.

e) Determine o ponto C do plano π mais próximo de P.

f) Determine a distância d' entre o ponto P e o plano π.

Respostas:

a) $Q = (2, 1, 1)$

b) $d = \sqrt{2}$

c) $A = (4, 3, -1)$ ou $A = (0, -1, 3)$

d) $B = (3, 2, 0)$ ou $B = (-1, -2, 4)$

e) $C = (4/3, 2/3, 1/3)$

f) $d' = \sqrt{3}/3$

3) Considere o ponto $P = (1, 1, 2)$ e as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1\colon (1-t, 2t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon (1+2t, 3-t, 5+2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos (escritos de forma cartesiana) π e ρ, onde π é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ e ρ é paralelo ao plano

$$\tau\colon 3x + y + z = 0.$$

b) Determine a equação cartesiana do plano β que contém o ponto P e a reta r_1.

c) As retas r_1 e r_2 são concorrentes. Determine o ponto C de interseção destas duas retas.

d) Determine as equações paramétricas da reta r_3 perpendicular comum a r_1 e r_2 (isto é, r_3 intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas retas).

Respostas:

a) $\pi\colon 2x + y = 2 \qquad \rho\colon 3x + y + z = 4$

b) $\beta\colon x + y - z = 0$

c) $C = (-1, 4, 3)$

d) $r_3 = (-1-5t, 4-4t, 3+3t),\ t \in \mathbb{R}$