P1 de Álgebra Linear I – 2004.2 (02/09/04)

Prova tipo C. Respostas

---

1) Considere os vetores $\bar{v} = (0, 1, 1)$ e $\bar{w} = (1, 1, -1)$.

a) Determine um vetor $\bar{a}$ de módulo igual a $\sqrt{6}$ tal que $\bar{a} \times \bar{v} = \bar{w}$.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 2) \cdot ((0, 1, 1) \times (1, 1, -1)) = 6.$$

c) Determine o valor de d para que se verifique a igualdade

$$(1, d, 2) \cdot ((0, 1, 1) \times (1, 1, -1)) = (1, d, 2) \cdot ((1, 1, -1) \times (0, 1, 1)).$$

Respostas:

a) $\bar{a} = (-1, 2, 1)$ ou $\bar{a} = (-1, -1, -2)$

b) $c = 10$

c) $d = 4$

2) Considere o ponto $P = (1, 1, 1)$ e a reta r e o plano π de equações

$$r\colon (-1 + 3t, 1 + t, -3 + 2t) \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \pi\colon x - y + z = 7.$$

a) Determine o ponto Q da reta r mais próximo de P.

b) Determine a distância d entre o ponto P e a reta r.

c) Determine um ponto A de r tal que a distância entre P e A seja $\sqrt{20}$.

d) Determine o ponto B da reta r tal que B, P e o ponto $(-1, 1, -3)$ da reta r sejam os vêrtices de um triângulo de área $\sqrt{21}$.

e) Determine o ponto C do plano π mais próximo de P.

f) Determine a distância d' entre o ponto P e o plano π.

Respostas:

a) $Q = (2, 2, -1)$

b) $d = \sqrt{6}$

c) $A = (5, 3, 1)$ ou $A = (-1, 1, -3)$

d) $B = (-4, 0, -5)$ ou $B = (2, 2, -1)$

e) $C = (3, -1, 3)$

f) $d' = \sqrt{12}$

3) Considere o ponto $P = (1, 1, 2)$ e as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1\colon (1-t, 2t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon (3+2t, 2-t, -3-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos (escritos de forma cartesiana) π e ρ, onde π é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ e ρ é paralelo ao plano

$$\tau\colon x + y + z = 0.$$

b) Determine a equação cartesiana do plano β que contém o ponto P e a reta r_1.

c) As retas r_1 e r_2 são concorrentes. Determine o ponto C de interseção destas duas retas.

d) Determine as equações paramétricas da reta r_3 perpendicular comum a r_1 e r_2 (isto é, r_3 intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas retas).

Respostas:

a) $\pi\colon 2x + y = 2, \quad \rho\colon x + y + z = 2$

b) $\beta = 3x + y - z = 2$

c) $C = (-1, 4, -1)$

d) $r_3 = (-1+t, 4+t, -1+t)$, $t \in \mathbb{R}$