P1 de Álgebra Linear I – 2004.2 (02/09/04)

Prova tipo B. Respostas

---

1) Considere os vetores $\bar{v} = (1, 1, 0)$ e $\bar{w} = (1, -1, 1)$.

a) Determine um vetor $\bar{a}$ de módulo igual a $\sqrt{6}$ tal que $\bar{a} \times \bar{v} = \bar{w}$.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 2) \cdot ((1, 1, 0) \times (1, -1, 1)) = 6.$$

c) Determine o valor de d para que se verifique a igualdade

$$(1, d, 2) \cdot ((1, 1, 0) \times (1, -1, 1)) = (1, d, 2) \cdot ((1, -1, 1) \times (1, 1, 0)).$$

Respostas:

a) $\bar{a} = (2, 1, -1)$ ou $\bar{a} = (-1, -2, -1)$

b) $c = -9$

c) $d = -3$

2) Considere o ponto $P = (-2, 3, 2)$ e a reta r e o plano π de equações

$$r\colon (1-t, 2+t, t) \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \pi\colon x - y + z = 3.$$

a) Determine o ponto Q da reta r mais próximo de P.

b) Determine a distância d entre o ponto P e a reta r.

c) Determine um ponto A de r tal que a distância entre P e A seja $\sqrt{29}$.

d) Determine o ponto B da reta r tal que B, P e o ponto $(1, 2, 0)$ da reta r sejam os vértices de um triângulo de área $\sqrt{6}$.

e) Determine o ponto C do plano π mais próximo de P.

f) Determine a distância d' entre o ponto P e o plano π.

Respostas:

a) $Q = (-1, 4, 2)$

b) $d = \sqrt{2}$

c) $A = (2, 1, -1)$ ou $A = (-4, 7, 5)$

d) $B = (-1, 4, 2)$ ou $B = (3, 0, -2)$

e) $C = (0, 1, 4)$

f) $d' = \sqrt{12}$

3) Considere o ponto $P = (1, 1, 2)$ e as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1\colon (1+t, 2t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon (5-2t, 2+2t, -2+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos (escritos de forma cartesiana) π e ρ, onde π é paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$ e ρ é paralelo ao plano

$$\tau\colon 2x + y + 4z = 0.$$

b) Determine a equação cartesiana do plano β que contém o ponto P e a reta r_1.

c) As retas r_1 e r_2 são concorrentes. Determine o ponto C de interseção destas duas retas.

d) Determine as equações paramétricas da reta r_3 perpendicular comum a r_1 e r_2 (isto é, r_3 intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas retas).

Respostas:

a) $\pi\colon x + z = 2 \quad \rho\colon 2x + y + 4z = 6$

b) $\beta\colon 3x - y + z = 4$

c) $C = (3, 4, -1)$

d) $r_3 = (3 + 4t, 4 + t, -1 + 6t),\ t \in \mathbb{R}$