P4 de Álgebra Linear I – 2002.1

Data: 14 de junho de 2002.

Nome:____ Matrícula:__________

Assinatura:_____________________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
2c	0.5		
2d	0.5		
2e	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	0.5		
3d	0.5		
3e	0.5		
4a	0.5		
4b	0.5		
4c	0.5		
4d	0.5		
4e	0.5		
Total	10.0		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Desligue o celular.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 da prova não haverá pontuação menor que** 0.5 **– Verifique cuidadosamente suas respostas.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

Para uso exclusivo do professor	*****	*****
Certas:	$\times$ 0.3	
Erradas:	$\times$ -0.2	
*****	Total	

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			

1.a) Considere as retas de equações paramétricas

$$r = (p_1+tv_1, p_2+tv_2, p_3+tv_3), \quad \text{e} \quad s = (q_1+tw_1, q_2+tw_2, q_3+tw_3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suponha que

$$(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3) = 0.$$

Então as retas se interceptam em um ponto.

1.b) A multiplicação de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

1.c) Sejam A uma matriz 3×3 cujo polinômio caraterístico é

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Então A não é diagonalizável.

1.d) Seja A uma matriz 2×2 ortogonal e simétrica. Então A representa um espelhamento.

1.e) Considere o plano π de equação cartesiana $ax + by + cz = d$ e a reta $r = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$. Suponha que $(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0$. Então a reta e o plano têm exatamente um ponto de interseção.

1.f) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são 0, 6 e 2.

1.g) Considere uma transformação linear P de $\mathbb{R}^3$ tal que $P^2 = P \circ P = P$.

Então P é uma projeção ortogonal.

1.h) O produto de duas matrizes inversíveis é uma matriz inversível.

1.i) Os vetores $\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$ formam uma base ortonormal.

2) Considere o plano $x+y+z=0$, o ponto $p=(1,1,1)$ e as retas $r_1=(t,1-t,t)$ e $r_2=(1-t,1+t,t)$, $t\in\mathbb{R}$. Determine

(2.a) A equação da reta r que contém o ponto p e é perpendicular a π.

(2.b) A equação do plano que contém o ponto p e é paralelo a r_1 e r_2.

(2.c) A distância entre as retas r_1 e r_2.

(2.d) A posição relativa das retas r_1 e r_2.

(2.e) A posição relativa da reta r_2 e o plano π.

3) Considere a projeção ortogonal P no plano $2x+2y+2z=0$ e a projeção Q no plano $x+y+z=0$ na direção da reta $(t,-t,0)$, $t\in\mathbb{R}$.

(3.a) Determine os autovalores de P e de Q.

(3.b) Determine bases de autovetores de P e de Q.

(3.c) Escreva P da forma $P=MDM^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(3.d) Escreva Q da forma $Q=NEN^{-1}$, onde E é diagonal. Determine explicitamente N.

(3.e) Determine a relação entre as transformações $Q\circ P$ e P.

4) Considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4.a) Determine os autovalores de A.

(4.b) Determine uma base de autovetores A.

(4.c) Determine uma forma diagonal D de A.

(4.d) Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(4.e) Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.