P2 de Álgebra Linear I – 2002.1

Data: 4 de maio de 2002.

Nome:____ Matrícula:____________

Assinatura:____________________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.5		
2	1.0		
3a	0.5		
3b	1.0		
3c	1.0		
3d	1.0		
4a	0.5		
4b	1.0		
4c	1.0		
4d	0.5		
Total	10.0		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente. Escreva de forma clara e legível.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 da prova não haverá pontuação menor que** 0.5 **– Verifique cuidadosamente suas respostas.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

Para uso exclusivo do professor	*****	*****
Certas:	$\times\ 0.3$	
Erradas:	$\times\ -0.2$	
*****	Total	

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			

1.a) Seja P uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ tal que $P^2 = P \circ P = P$, então P é uma projeção ortogonal.

1.b) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ linearmente dependentes. Então existem números reais σ e λ tais que $v = \sigma y + \lambda w$.

1.c) Seja $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal em um plano e $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um espelhamento em um plano. Então $E \circ P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma projeção ortogonal.

1.d) Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos de $\mathbb{R}^3$ contendo a origem e P_1, P_2 e P_3 as respetivas projeções ortogonais nestes planos. Suponha que $P_3 \circ P_2 \circ P_1$ é a transformação linear nula. Então os planos se interceptam em um ponto.

1.e) Dada uma base $\beta = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ considere a nova base $\gamma = \{u + v + w, u + v, u + w\}$ de $\mathbb{R}^3$. Considere o vetor h cujas coordenadas na base β são $(1, 1, 1)$. Então as coodenadas de h na base γ são $(1/3, 2/3, 1/3)$.

1.f) A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é sempre inversível (independentemente do valor de a).

1.g) Seja A uma matriz 2×2 inversível. Suponha que $A^2 = 2A$. Então $\det A = 2$.

1.h) Existe uma projeção ortogonal $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $P(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$.

1.i) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 1)$, $T(1, 1, 0) = (1, 1)$, $T(1, 1, 1) = (1, 1)$.

2) Determine quais das matrizes

2.a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2.b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

representam uma projeção (ortogonal ou não) ou um espelhamento.

- No caso das projeções determine se são ou não ortogonais. No caso de projeções ortogonais, determine a reta ou o plano de projeção, e no caso não ortogonal a direção (reta ou plano) de projeção e o plano ou reta de projeção.
- No caso dos espelhamentos determine a reta ou o plano de espelhamento.

3) Considere a projeção P no plano $\pi\colon x + y - z = 0$ na direção do vetor $(1, -1, -1)$.

3.a) Seja $u = (4, -1, 1) = (2, -2, -2) + (2, 1, 3)$ (onde $(2, 1, 3) \in \pi$). Sem determinar a matriz de P, calcule $P(u)$.

3.b) Determine a matriz de P.

3.c) Sejam M a projeção ortogonal na reta $(t, -t, -t)$ e N a projeção ortogonal no plano $\pi\colon x - y - z = 0$. Determine as matrizes de M e N.

3.d) Determine as matrizes de $P \circ M$ e $M \circ P$.

4) Seja β a base formada pelos vetores $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

4.a) Verifique que β é uma base.

4.b) Determine as coordenadas do vetor $v = (1, 2, 3)$ na base β.

4.c) Seja S a transformação linear definida por

$$S(u) = u \times (1, 1, 1).$$

Calcule a matriz de$S$.

4.d) Determine se a matriz de S é inversível e em caso afirmativo determine sua inversa.