P1 de Álgebra Linear I – 2002.2

Data: 6 de setembro de 2002.

Nome:____ Matrícula:__________

Assinatura:____________________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
2c	0.5		
2d	0.5		
2e	0.5		
2f	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	1.0		
3d	0.5		
3e	0.5		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.5		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado. Escreva de forma clara e legível.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique cuidadosamente todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 da prova não haverá pontuação menor que** 0.5 **– Verifique cuidadosamente suas respostas.**
- **Faça a prova na sua turma.**

Marque no quadro as respostas da primeira questão. Não é necessário justificar esta questão.

ATENÇÃ0: resposta errada vale ponto negativo!, a questão pode ter nota negativa!

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			
1.f			
1.g			
1.h			
1.i			

1.a) Considere vetores não nulos u_1, u_2 e u_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u_1 \cdot u_2 = 0 = u_1 \cdot u_3.$$

Então os vetores u_2 e u_3 são paralelos.

1.b) Considere os vetores $(1,1,1)$ e $(a,-1,a)$. Suponha que

$$(1,1,1) \times (a,-1,a) = (0,0,0).$$

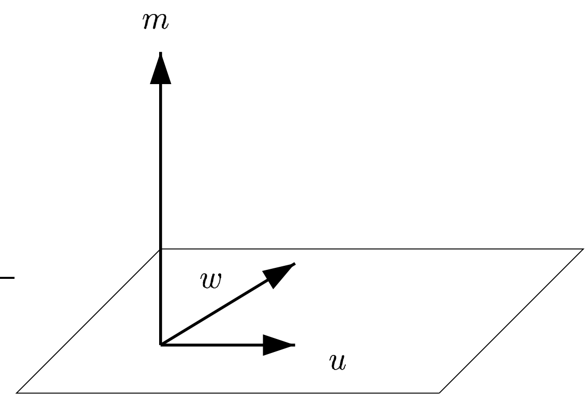

Figura 1: Questão 1.c

Então $a = -1$.

1.c) Veja a Figura 1. Suponha que

$$|m| = |w|\,|u|\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

onde α é o ângulo entre os vetores u e w. O vetor m é o produto vetorial dos vetores w e u, isto é, $m = w \times u$.

1.d) Existe um único plano de $\mathbb{R}^3$ que contém às retas

$$\{(1+t, 1+t, 1+t),\, t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{e} \quad \{(1+t, 2+t, 3+t),\, t \in \mathbb{R}\}.$$

1.e) Considere vetores w e v de $\mathbb{R}^3$. Se $w \times v = \bar{0}$ então $w \cdot v = |w|\,|v|$.

1.f) Considere os planos de equações cartesianas

$$\begin{aligned} \pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ \pi_3 &: a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}$$

Suponha que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

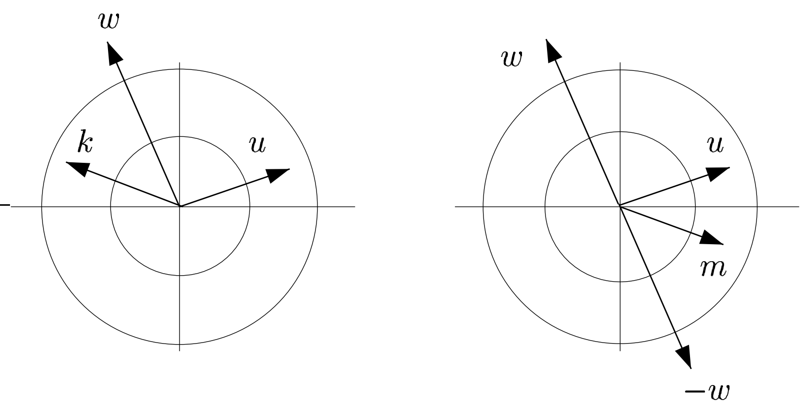

Figura 2: Questões 1.h e 1.i

Então os planos π_1, π_2 e π_3 se interceptam ao longo de uma reta.

1.g) Veja se o seguinte raciocínio é correto. Sejam u e v vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u \cdot (u + v) = (u \cdot u) + (u \cdot v) = u \cdot u.$$

Então $v = \bar{0}$.

1.h) Considere os vetores u, w e k na Figura 2. Suponha que $u \cdot w = 0$ e que as circunferências centradas na origem têm raio 1 e 2. Então $u \cdot k < 0$.

1.i) Considere os vetores u, w e m na Figura 2. Suponha que $u \cdot w = 0$ e que as circunferências centradas na origem têm raios 1 e 2 respectivamente. Então $u \cdot m > 4$.

2) Considere a reta r de equações paramétricas

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 0 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e o ponto $Q = (1, 0, 0)$.

2.a) Determine a equação cartesiana do plano π ortogonal a r contendo o ponto Q.

2.b) Determine as equações paramétricas do plano π.

2.c) Determine as equações cartesianas da reta r.

2.d) Calcule a distância entre o ponto Q e a reta r.

2.e) Determine o ponto A da reta r mais próximo de Q.

2.f) Determine, se possível, um ponto da reta r a distância 2 de Q.

3) Considere os pontos $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

3.a) Determine o ponto médio do segmento de extremos $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

3.b) Encontre a equação do plano π cujos pontos são todos equidistantes de $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

Considere agora o ponto $C = (1, 1, 1)$.

3.c) Determine todos os possíveis paralelogramos de vértices A, B e C (isto é, determine as diferentes possibilidades para o quarto vértice).

3.d) Determine a área dos paralelogramos do item anterior.

4) Considere as retas

$$r_1 = \{(2+t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$r_2 = \{(1+s, -1+2s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

4.a) Determine a posição relativa (iguais, paralelas, concorrentes, reversas) das retas r_1 e r_2.

4.b) Caso r_1 e r_2 sejam concorrentes ou paralelas, escreva a equação cartesiana do plano que contém essas duas retas. Caso contrário, calcule a distância entre r_1 e r_2. (**Atenção:** não deixe de justificar sua escolha!)