P1 de Álgebra Linear I – 2002.2
Data: 6 de setembro de 2002.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b	V		
1.c		F	
1.d	V		
1.e		F	
1.f		F	
1.g		F	
1.h	V		
1.i		F	

1.a) Considere vetores não nulos u_1, u_2 e u_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u_1 \cdot u_2 = \bar{0} = u_1 \cdot u_3.$$

Então os vetores u_2 e u_3 são paralelos.

Falso. É suficiente considerar os vetores $u_1 = i$, $u_2 = j$ e $u_3 = k$. Observe que $i \cdot j = 0 = i \cdot k$. Mas os vetores j e k não são paralelos.

1.b) Considere os vetores $(1, 1, 1)$ e $(a, -1, a)$. Suponha que

$$(1, 1, 1) \times (a, -1, a) = (0, 0, 0).$$

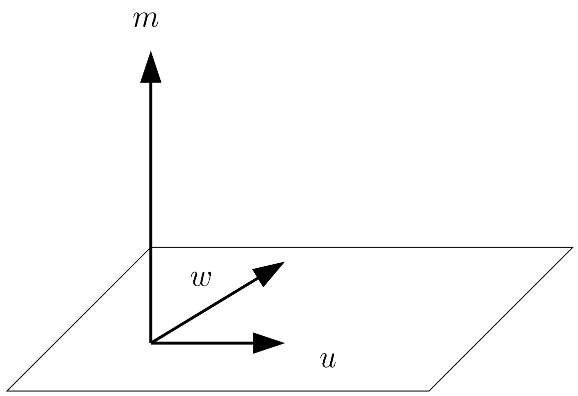


Figura 1: Questão 1.c

Então $a = -1$.

Verdadeiro. O vetor $(a, -1, a)$ deve ser paralelo a $(1, 1, 1)$. Logo, $(a, -1, a) = \lambda\,(1, 1, 1)$. Ou seja $\lambda = -1$. Outra resolução, veja que

$$(a, -1, a) \times (1, 1, 1) = (-1 - a, -a + a, a + 1).$$

Logo, se $(a, -1, a) \times (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Portanto, necessariamente, $a = -1$

1.c) Veja a Figura 1. Suponha que

$$|m| = |w|\,|u|\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

onde α é o ângulo entre os vetores u e w. O vetor m é o produto vetorial dos vetores w e u, isto é, $m = w \times u$.

Falso. O módulo do vetor m está correto, mas o sentido está errado, não obedece a lei da mão direita (deveria *apontar* no sentido contrário)

1.d) Existe um único plano de $\mathbb{R}^3$ que contém às retas

$$\{(1 + t, 1 + t, 1 + t),\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{e} \quad \{(1 + t, 2 + t, 3 + t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Verdadeiro. As retas são paralelas (têm o mesmo vetor diretor $(1, 1, 1)$) e distintas (por exemplo, o ponto $(1, 2, 3)$ da segunda reta não pertence à primeira). Portanto, existe um único plano π contendo as duas retas.

De fato, a equação cartesiana de plano π contendo as duas retas é obtida como segue. Os vetores $(1,1,1)$ (vetor diretor das retas) e $(0,1,2)$ (o vetor determinado pelos pontos $(1,1,1)$ e $(1,2,3)$ das retas) são paralelos ao plano Portanto, um vetor normal do plano é

$$(1,1,1)\times(0,1,2) = (1,-2,1).$$

Logo,

$$\pi\colon x - 2y + z = d,$$

onde $d = 0$ (pois $(1,1,1)$ pertence à reta).

1.e) Considere vetores w e v de $\mathbb{R}^3$. Se $w \times v = \bar{0}$ então $w \cdot v = |w|\,|v|$.

Falso. De $w \times v = \bar{0}$ obtemos apenas que os vetores são paralelos, mas não seu ângulo (que pode ser π ou 0). Por exemplo, os vetores $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ verificam $(1,0,0)\times(-1,0,0) = \bar{0}$, mas $(1,0,0)\cdot(-1,0,0) = -1 \neq 1$.

1.f) Considere os planos de equações cartesianas

$$\begin{aligned}
\pi_1\colon a_1x + b_1y + c_1z &= d_1,\\
\pi_2\colon a_2x + b_2y + c_2z &= d_2,\\
\pi_3\colon a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.
\end{aligned}$$

Suponha que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Então os planos π_1, π_2 e π_3 se interceptam ao longo de uma reta.

Falso. Os planos poderiam ser paralelos e diferentes, por exemplo,

$$x+y+z=0, \quad x+y+z=1, \quad x+y+z=2.$$

Outra possibilidade, os planos poderiam se intersetar em retas dois a dois paralelas. Por exemplo,

$$x+y+z=0, \quad x+2y+z=1, \quad 2x+3y+2z=1.$$

Existem ainda outras possibilidades que omitiremos (por exemplo, dois planos paralelos entre si interceptando o terceiro ao longo de duas retas paralelas).

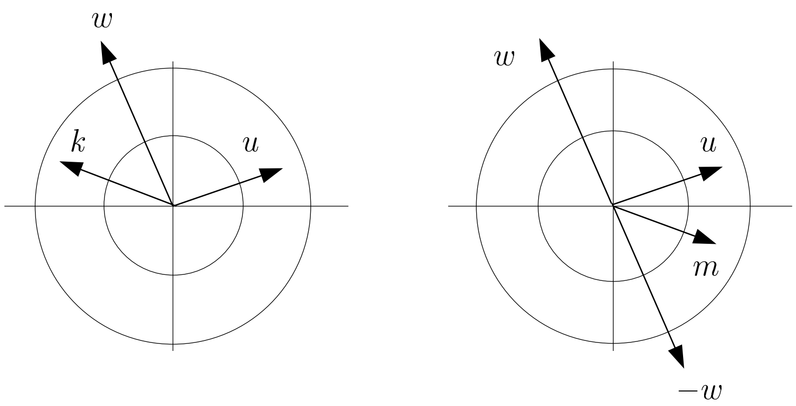


Figura 2: Questões 1.h e 1.i

1.g) Veja se o seguinte raciocínio é correto. Sejam u e v vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u \cdot (u + v) = (u \cdot u) + (u \cdot v) = u \cdot u.$$

Então $v = \bar{0}$.

Falso: Do raciocínio somente podemos concluir que u e v são ortogonais (pois $u \cdot v = 0$). Por exemplo, os vetores $u = i$ e $v = k$ verificam a igualdade acima e $k \neq \bar{0}$.

1.h) Considere os vetores u, w e k na Figura 2. Suponha que $u \cdot w = 0$ e que as circunferências centradas na origem têm raios 1 e 2. Então $u \cdot k < 0$.

Verdadeiro: Temos $u \cdot k = |u|\,|k| \cos \alpha$, onde $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ é o ângulo formado por u e k (isto decorre do fato de w ser ortogonal a u). Logo, $\cos \alpha < 0$, e, como $|u| > 1 < |k|$, a afirmação é verdadeira.

1.i) Considere os vetores u, w e m na Figura 2. Suponha que $u \cdot w = 0$ e que as circunferências centradas na origem têm raios 1 e 2. Então $u \cdot m > 4$.

Falso: Temos $u \cdot m = |u|\,|m| \cos \alpha$, onde α é o ângulo formado por u e m. Logo

$$u \cdot m = |u|\,|m| \cos \alpha \leq (2)\,(2) = 4.$$

2) Considere a reta r de equações paramétricas

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 0 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e o ponto $Q = (1, 0, 0)$.

2.a) Determine a equação cartesiana do plano π ortogonal a r contendo o ponto Q.

2.b) Determine as equações paramétricas do plano π.

2.c) Determine as equações cartesianas da reta r.

2.d) Calcule a distância entre o ponto Q e a reta r.

2.e) Determine o ponto A da reta r mais próximo de Q.

2.f) Determine, se possível, um ponto da reta r a distância 2 de Q.

Resposta: Para o item **(a)**. O vetor normal do plano π é o vetor diretor da reta, ou seja, $(2, 1, -1)$. Logo a equação cartesiana do plano é da forma,

$$\pi\colon\, 2x + y - z = d,$$

onde d é determinado pela condição, $Q = (1, 0, 0) \in \pi$. Isto é, $2(1)+0-0 = d$. Logo,

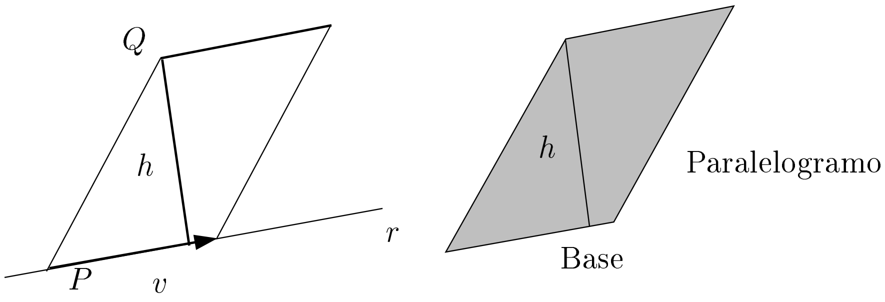
$$\pi\colon\, 2x + y - z = 2.$$

Item **(b)**. Para determinar as equações paramétricas do plano devemos conhecer um ponto do plano (já temos o ponto Q) e dois vetores paralelos ao plano (não paralelos entre si). Podemos escolher vetores ortogonais ao vetor normal ao plano. Por exemplo, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 2)$ (verifique que $(2, 1, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0 = (2, 1, -1) \cdot (1, 0, 2)$). Logo, uma equação paramétrica do plano é

$$x = 1 + 0\,t + s, \quad y = 0 + t + 0\,s, \quad z = 0 + t + 2\,s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Item **(c)**. Para determinar as equações cartesianas de r é suficiente encontrar dois planos não paralelos entre si contendo à reta r. O vetor normal destes planos deve ser ortogonal ao vetor diretor $(2, 1 - 1)$ de r. Podemos escolher os vetores $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 2)$ do item anterior. Logo os planos são da forma

$$y + z = d, \quad x + 2z = e.$$



Onde d e e são obtidos pela condição do ponto $P = (1,1,0)$ da reta pertencer aos dois planos. Temos,

$$y + z = 1, \quad x + 2z = 1.$$

Altermativamente, podemos resolver a equação paramétrica da reta por (eliminando) t.

$$t = \frac{x-1}{2} = y - 1 = -z, \quad x - 2y = 1, \quad y + z = 1.$$

Isto fornece as equações dos planos. Observe que igualando a primeira e a terceira equações obtemos $x + 2z = 1$.

Item **(d)**. Para calcular a distância d de Q a r consideraremos o ponto $P = (1,1,0)$ da reta e usaremos a fórmula

$$|\overline{PQ} \times (2,1,-1)| = \text{área(Paralelogramo)} = \text{Base} \cdot \text{(h)altura},$$

onde a base é $|(2,1,-1)| = \sqrt{6}$ e a altura é a distância d. Veja a figura.

Portanto,

$$d = \frac{|(0,-1,0) \times (2,1,-1)|}{\sqrt{6}} = \frac{|(1,0,2)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Item **(e)**. Observe que o ponto A de r mais próximo de Q é obtido como a interseção do plano π ortogonal a r contendo Q (lembre o primeiro item do exercício) e r. Ou seja, a interseção de $2x + y - z = 2$ e $(1+2t, 1+t, -t)$. Devemos resolver

$$2(1+2t) + (1+t) - (-t) = 2 \quad 6t = -1, \quad t = -1/6.$$

Logo $A = (4/6, 5/6, 1/6)$.

Vamos conferir que a distância entre $Q = (1, 0, 0)$ e A é a obtida no item anterior.

$$|\overline{QA}| = |(2/6, 5/6, 1/6)| = \sqrt{30/36} = \sqrt{5}/\sqrt{6}.$$

Veja também que o vetor $\overline{QA}$ é ortogonal à reta.

Finalmente, para o item **(f)**, calculo de um ponto de r a distância 2 de Q, devemos considerar a interseção da esfera de raio 2 centrada em Q (o lugar geométrico dos pontos a distância 2 de Q) e a reta r. Ou seja,

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2^2, \quad \text{e} \quad (1+2t, 1+t, -t).$$

Ou seja,

$$4t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 = 4, \quad 6t^2 + 2t - 3 = 0.$$

As soluções são,

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}.$$

Ou seja obtemos dois pontos (dependendo do parâmetro t escolhido).

$$(1 - (-1+\sqrt{19})/3, 1 + (-1+\sqrt{19})/6, (1-\sqrt{19})/6),$$
$$(1 - (-1-\sqrt{19})/3, 1 + (-1-\sqrt{19})/6, (-1+\sqrt{19})/6).$$

3) Considere os pontos $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

3.a) Determine o ponto médio do segmento de extremos $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

3.b) Encontre a equação do plano π cujos pontos são todos equidistantes de $A = (1, 4, 2)$ e $B = (0, 2, -2)$.

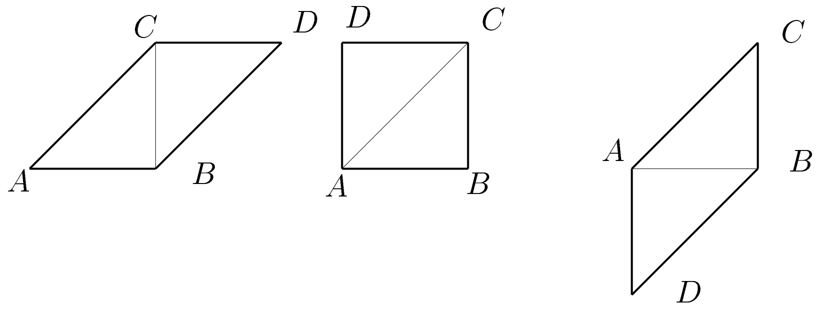
Considere agora o ponto $C = (1, 1, 1)$.

3.c) Determine todos os possíveis paralelogramos de vértices A, B e C (isto é, determine as diferentes possibilidades para o quarto vértice).

3.d) Determine a área dos paralelogramos do item anterior.

Resposta: Para responder o item **(a)**, observe que ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é

$$(\frac{1+0}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{2+(-2)}{2}) = (1/2, 3, 0).$$



Item **(b)**. O vetor normal do plano π é $(1,2,4)$ (o plano é ortogonal ao vetor $\overline{BA} = (1,2,4)$). Um ponto do plano π é o ponto médio do segmento AB, $(1/2,3,0)$. Logo a equação do plano é

$$2x + 4y + 8z = 13.$$

Na figura se encontram os três possíveis paralelogramos (correspondentes aos casos: AB e AC são lados, AC não é lado, e AB não é lado). Nos diferentes casos temos

$$\begin{aligned}
D = &\ (1,4,2) + (-1,-2,-4) + (0,-3,-1) = (0,-1,-3),\\
D = &\ A + \overline{BC} = (1,4,2) + (1,-1,3) = (2,3,5),\\
D = &\ A + \overline{AB} - \overline{AC} = A - \overline{BC} = (1,4,2) + (-1,-2,-4) - (0,-3,-1) =\\
&= (0,5,-1).
\end{aligned}$$

Em todos os casos, a área do paralelogramo é

$$|\overline{AC} \times \overline{AB}| = |(0,3,1) \times (-1,-2,-4)| = |(10,1,-3)|.$$

Logo a área é $\sqrt{110}$.

4) Considere as retas

$$r_1 = \{(2+t, 0, -t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$r_2 = \{(1+s, -1+2s, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}.$$

4.a) Determine a posição relativa (iguais, paralelas, concorrentes, reversas) das retas r_1 e r_2.

4.b) Caso r_1 e r_2 sejam concorrentes ou paralelas, escreva a equação cartesiana do plano que contém essas duas retas. Caso contrário, calcule a distância entre r_1 e r_2. (**Atenção:** não deixe de justificar sua escolha!)

Resposta: Primeiro veremos se as retas são concorrentes ou não. Considere os pontos $P = (2, 0, 0) \in r_1$, $Q = (1, -1, 0) \in r_2$ e os vetores $\overline{QP} = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$ (o vetor diretor de r_1) e $u = (1, 2, 1)$ (o vetor diretor de r_2).

Observe que as retas não são paralelas (pois os vetores diretores não são paralelos).

As retas serão concorrentes se

$$\overline{QP} \cdot (v \times u) = 0$$

e reversas em caso contrário.

Temos

$$(v \times u) = (2, -2, 2)$$

e

$$(2, -2, 2) \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Portanto, as retas são concorrentes.

Outra forma de conferir que as retas são concorrentes é resolvendo (ou tentando resolver) o sistema:

$$2 + t = 1 + s, \quad 0 = -1 + 2s =, \quad -t = s.$$

Das duas últimas equações obtemos,

$$s = 1/2, \quad t = -1/2.$$

Estas condições são compatíveis com a primeira equação. Assim obtemos que o ponto de interseção é

$$P = (3/2, 0, 1/2).$$

Para calcular a equação do plano π contendo as duas retas observe que já calculamos sue vetor normal: $(1, -1, 1)$. Logo o plano é da forma

$$\pi : x - y + z = d.$$

Usando que $P = (3/2, 0, 1/2) \in \pi$, temos $d = 2$,

$$\pi : x - y + z = 2.$$