P3 de Álgebra Linear I – 2001.1
Data: 20 de junho de 2001.

1) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores e autovetores das matrizes A e B. $(0.5 + 0.5)$.

b) Estude se estas matrizes são diagonalizáveis. (0.5).

c) Escreva as matrizes diagonalizáveis do item anterior na forma RDR^{-1} onde D é uma matriz diagonal. $(0.5 + 0.5)$.

Resposta: Para calcular os autovalores calcularemos primeiro os polinômios característicos:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda^2 - 3).$$

Logo $\lambda = 3$ é um autovalor duplo.

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda - 6).$$

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = 6$ são autovalores simples.

Para calcular os autovetores de 3, 2 e 6 devemos calcular, respectivamente,

$$(A - 3I)X = 0, \quad (B - 2I)X = 0, \quad (B - 6I)X = 0.$$

No primeiro caso obtemos o sistema:

$$x + y = 0, \quad -x - y = 0.$$

Ou seja, $x = -y$. Os autovetores são da forma $(t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$.

No segundo caso obtemos o sistema:

$$3x - 3y = 0, \quad -x + y = 0.$$

Ou seja, $x = y$. Os autovetores são da forma (t, t), $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$.

No último caso obtemos o sistema:

$$-x - 3y = 0, \quad -x - 3y = 0.$$

Ou seja, $x = -3y$. Os autovetores são da forma $(-3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$.

A matriz A não é diagonalizável, pois não é possível encontrar uma base de autovetores (no máximo é possível encontrar um autovetor l.i.).

A matriz B é diagonalizável, pois existe uma base de autovetores: $\{(1,1), (-3,1)\}$.

Usando a base de autovetores $\{(1,1), (-3,1)\}$ de B temos,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

2) Considere a matriz

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.a) Encontre todos os autovalores de F e todos os autovetores de F. $(0.5 + 0.5)$.

2.b) Encontre uma matriz R inversível, sua inversa R^{-1} e uma matriz D diagonal tais que $F = RDR^{-1}$. $(0.5 + 0.5 + 0.5)$.

Resposta: O polinômio característico de F é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda^2) - (5-\lambda) = \lambda(5-\lambda)(2-\lambda).$$

Logo os autovalores são 5, 2 e 0 todos simples. (Observe que a soma dos autovalore é 7, igual ao traço da matriz, como deve ser).

Os autovetores correspondentes são obtidos resolvendo os sistemas:

$$(F - 5I)(X) = 0, \quad (F - 2I)(X) = 0, \quad F(X) = 0.$$

Obtemos os sistemas

$$-4x + z = 0, \quad x - 4z = 0,$$

com solução $(0,t,0)$. Logo os autovetores são da forma $(0,t,0)$, $t\in\mathbb{R}$ e $t\neq 0$.

O segundo sistema é,

$$-x+z=0, \quad 3y=0, \quad x-z=0,$$

com solução $(t,0,t)$. Logo os autovetores são da forma $(t,0,t)$, $t\in\mathbb{R}$ e $t\neq 0$.

O último sistema é,

$$x+z=0, \quad 5y=0, \quad x+z=0,$$

com solução $(t,0,-t)$. Logo os autovetores são da forma $(t,0,-t)$, $t\in\mathbb{R}$ e $t\neq 0$. (Observe que os autovetores são ortogonais, como é de esperar numa matriz simétrica).

Temos, normalizando a base, o seguinte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

onde a inversa de R é sua trasposta, pois é uma matriz ortogonal.

3) Considere a projeção ortogonal P no plano $2x+2y+z=0$.

Escreva a matriz de P da forma BDB^{-1}, onde D é uma matriz diagonal. Ache B, D e B^{-1} explicitamente. ($B=1.0$, $D=1$ e $B^{-1}=0.5$).

Resposta: O vetor normal ao plano de projeção $(2,2,1)$, que é um autovetor de autovalor 0. Consideraremos agora dois vetores do plano ortogonais. Obteremos assim dois autovetores l.i. de autovalor 1. Tomando $(1,-1,0)$ e $(1,-1,0)\times(2,2,1)=(-1,-1,4)$ obtemos estes vetores. Temos que

$$\beta=\{(2/3,2/3,1/3),(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{18},1/\sqrt{18},-4/\sqrt{18}\}$$

é uma base de autovetores.

A expressão de P na base β é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$P=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} \end{pmatrix},$$

onde $B^{-1} = B^t$ pois B é ortogonal.

4) Para cada uma das matrizes abaixo, verifique se é uma rotação ou uma projeção ortogonal, ou nem uma coisa nem outra. Para a rotação identifique o eixo, e para a projeção o plano ou a reta onde é feita a projeção.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Cada identificação 0.5, o plano ou reta de projeção 0.5, e o eixo de rotação 0.5).

Resposta: Observamos que uma projeção ortogonal é uma matriz simétrica e uma rotação é ortogonal.

Como a matriz A não é ortogonal não pode ser uma rotação. Como uma projeção tem traço 1 e a matriz A tem traço 7 não é projeção. O de outra forma. Uma projeção tem determinante 0, como a matriz A tem determinante -1, não é projeção. Ou de outra forma. Uma projeção P verifica $P^2 = P$, e $A^2 \neq A$.

Como a matriz C não é ortogonal não pode ser uma rotação. Como a matriz C não é simétrica não pode ser uma projeção.

A matriz B é simétrica e não é ortogonal. Logo a única possibilidade é que seja uma projeção. A matriz B tem todas as linhas iguais. Logo seu determinante é zero. Portanto, 0 é um autovalor. Os autovetores de 0 estão no plano $x + y + z = 0$ (resolva o sistema correspondente). Logo 0 é um autovetor duplo (no mínimo é duplo, e como não pode ter multiplicidade 3, pois então a matriz seria nula ou teria traço zero, como preferir). O outro autovetor verifica $0 + \lambda = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$ (o traço da matriz). Logo B tem autovalor 0 duplo e 1 simples. Logo, como é simétrica, é uma projeção na reta de vetor diretor o autovalor correspondente. Este autovetor é $(1, 1, 1)$ (resolva o sistema ou veja que o vetor $(1, 1, 1)$ pertence a reta de projeção).

A matriz D é ortogonal e não é simétrica. Logo a única possibilidade é que seja uma projeção. Como é ortogonal e estamos em dimensão três tem um autovalor ± 1.

Se D fosse uma rotação 1 seria um autovalor. Se um fosse autovalor o sistema a seguir teria solução não trivial (resolvendo este sistema também obteremos o eixo de rotação):

$$-x + \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}/2z = 0, \quad -x - y = 0, \quad \sqrt{2}/2y + (\sqrt{2}/2 - 1)z = 0.$$

Temos $x = -y$. Substituindo

$$(\sqrt{2}/2 + 1)y + \sqrt{2}/2z = 0, \quad \sqrt{2}/2 + y(\sqrt{2}/2 - 1)z = 0.$$

Temos $y + (1 - \sqrt{2})z =$. Logo um autovetor é $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, 1)$.

Observe que, como a matriz é ortogonal, o plano de vetor normal $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, 1)$ é transformado nele próprio. Temos as seguintes possibilidades: ou a restrição de D a este plano é uma rotação ou não. No último caso haveria algum autovetor. Como D é ortogonal e estamos em um plano o vetor perpendicular também seria um autovetor. Logo D teria uma base ortogonal de autovetores, e em tal caso, seria simétrica. Como isto não ocorre, temos que D é uma rotação.

Dos raciocínios anteriores obtemos que se trata de uma rotação de eixo a reta $((1 - \sqrt{2})t, (\sqrt{2} - 1)t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.