P2 de Álgebra Linear I – 2001.1

Data: 16 de maio de 2001.

Gabarito

1) Considere os vetores

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (3,3,2), \quad u_4 = (2,2,2)$$

e o subespaço vetorial V gerado por u_1, u_2, u_3 e u_4.

a) Determine uma base β de V.

b) Determine uma base ortogonal β' de V.

c) Determine uma base ortogonal β'' de $\mathbb{R}^3$ que contenha β'.

d) Veja se $(2,2,4)$ pertence a V.

e) Escreva o vetor $(5,5,3)$ como combinação linear dos vetores da base β.

Resposta:

Como os vetores u_1 e u_2 não são paralelos (proporcionais) eles são linearmente independentes.

O vetor u_3 é combinação linear de u_1 e u_2. Isto pode ser verificado de duas formas. Veja que o determinante com linhas as coordenadas dos vetores u_1, u_2 e u_3 é nulo. Ou tente escrever

$$u_3 = x\, u_1 + y\, u_2.$$

Temos

$$3 = x + y, \quad 3 = x + y, \quad 2 = x.$$

Logo a solução é $u_3 = w\, u_1 + u_2$.

Obviamente o vetor u_4 é combinação linear de u_1 e u_2 ($u_4 = 2\, u_1 + 0\, u_2$).

Portanto, uma base β é $\beta = \{u_1, u_2\}$.

Para determinar β' determinamos a equação cartesiana de V. Como V é um plano e seu vetor normal é $u_1 \times u_2 = (-1,1,0)$ a equação cartesiana é $x - y = 0$. Por exemplo, $(0,0,1)$ e $(1,1,0)$ formam uma base ortogonal de V.

A base β'' já esta determinada (é suficiente acrescentar o vetor normal do plano à base β') $\{(0,0,1),(1,1,0),(1,-1,0)\}$.

Como $2-2=0$, o vetor $(2,2,4)$ verifica a equação cartesiana de V, logo está em V.

Fazemos,

$$(5,5,3) = x\,u_1 + y\,u_2.$$

Temos

$$5 = x+y, \quad 5 = x+y, \quad 3 = x.$$

Logo $x=3$ e $y=2$, $(5,5,3) = 3\,(1,1,1) + 2(1,1,0)$.

2) Considere as transformações lineares

$$T(x,y) = (x+3y, 2x+4y), \quad S(x,y) = (5x+7y, 6x+8y).$$

Determine explicitamente as matrizes das transformações lineares T, S, $T\circ S$ e $S\circ T$.

Resposta: Temos $T(1,0) = (1,2)$, $T(0,1) = (3,4)$, $S(1,0) = (5,6)$ e $S(0,1) = (7,8)$. Logo

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad [S] = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para calcular os produtos,

$$[T\circ S] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot 6 & 1\cdot 7 + 3\cdot 8 \\ 2\cdot 5 + 4\cdot 6 & 2\cdot 7 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga temos,

$$[S\circ T] = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}.$$

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como a projeção ortogonal na reta $r\colon \{(t,3t),\, t\in\mathbb{R}\}$.

a) Determine a matriz de T.

b) Calcule $T(1,3)$ e $T(-3,1)$.

Resposta: Temos que $n = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ é um vetor normal unitário da reta. Logo

$$T(v) = (v \cdot n)\, n.$$

Portanto,

$$T(1,0) = \frac{1}{10}(1,3), \quad T(0,1) = \frac{3}{10}(1,3).$$

Logo

$$[T] = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para calcular $T(1,3)$ e $T(-3,1)$ temos duas possibilidades, ou aplicamos a matriz ou vemos que como $(1,3)$ é o vetor diretor da reta onde projetamos então $T(1,3) = (1,3)$ e que como $(-3,1)$ é o vetor normal temos $T(-3,1) = (0,0)$.

4) Considere o vetor $v_0 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e defina a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times v_0.$$

a) Determine o conjunto dos vetores v tais que $T(v) = 0$.

b) Estude se existe algum vetor v tal que $T(v) = v_0$.

c) Estude se existe algum vetor v tal que $T(v) = v$.

d) Determine a forma geral de T e sua matriz $[T]$.

e) É T inversível?

Resposta: 0 conjunto dos vetores v tais que $T(v) = 0$ são os vetores paralelos a v_0. Ou seja os vetores da forma (t,t,t), $t \in \mathbb{R}$.

Não existe nenhum vetor v tal que $T(v) = v_0$, pois $T(v)$ é sempre ortogonal a v_0.

Não existe nenhum vetor não nulo v tal que $T(v) = v$, pois $T(v)$ é sempre ortogonal a v. Obviamente, o caso trivial trivial $v = 0$ verifica $T(v) = 0$.

Temos

$$T(1,0,0) = (0,-1,1), \quad T(0,1,0) = (1,0,-1), \quad T(0,0,1) = (-1,1,0).$$

Logo

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x,y,z) = (y+z, -x-z, x-y).$$

A matriz T não é inversível. Isto pode ser visto de duas formas diferentes. Ou calculando seu determinante e vendo que é zero. Ou vendo que T não é injetiva ($T(1,1,1) = T(0,0,0) = (0,0,0)$) e portanto não tem inversa.