# P1 de Álgebra Linear I – 2001.1

Data: 9 de abril de 2001.

## Gabarito

**1)** Consider as retas

$$r_1 = \{(1,1,1) + t(4,0,-2), \quad t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{(1-2t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

**a)** Estude a posição relativa das retas $r_1$ e $r_2$, isto é, descubra se são paralelas, reversas ou concorrentes. (0.5 pts)

**b)** Calcule a distância entre as retas $r_1$ e $r_2$. (1.0 pts)

**c)** Encontre um ponto $P$ de $r_1$ tal que a distância de $P$ a $r_2$ seja igual a distância entre $r_1$ e $r_2$. (0.5 pts)

**d)** Determine a área paralelogramo com vértices $(1,1,1)$, $(5,1,-1)$ (pontos de $r_1$) e $(1,1,0) \in r_2$ (não é dado o quarto vértice). (1.0 pts)

**e)** Determine o paralelogramo com vertices $(1,1,1)$, $(5,1,-1)$ (pontos de $r_1$), $(1,1,0) \in r_2$ e o quarto vértice em $r_2$. (0.5 pts)

**f)** Considere o plano $\pi$ que contém as duas retas $r_1$ e $r_2$. Determine dois vetores paralelos ao plano $\pi$ que não sejam colineares. (0.5 pts)

**g)** Determine o vetor normal do plano $\pi$. (0.5 pts)

**h)** Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano $\pi$. (0.5 + 0.5 pts)

**Resposta:**

**(a)** Os vetores diretores da retas são colineares $(4,0,-2) = -2(-2,0,1)$. Portanto, as retas ou são iguais ou são paralelas (diferentes). Para decidir é suficiente ver se o ponto $(1,1,1) \in r_1$ está em $r_2$, isto é, se é possível achar $t$ tal que

$$1 = 1 - 2t, \quad 1 = 1 + 0t, \quad 1 = 0 + t.$$

Da primeira equação temos $t = 0$, que na terceira dá $1 = 0$. Logo as retas são paralelas e diferentes.

**(b)** Como as retas são paralelas a distância $d$ de $r_1$ a $r_2$ é a distância de qualquer ponto de $r_2$ a $r_1$. Escolhemos os pontos $A = (1, 1, 0) \in r_2$ e $B = (1, 1, 1) \in r_1$. Se $N$ é o ponto de $r_1$ mais próximo de $A$ teremos $d = |\overline{AN}|$ e

$$\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB},$$

onde

$$\overline{NB} = (\overline{AB} \cdot v)v,$$

onde $v$ é um vetor diretor unitário de $r_1$. Temos que $v = 1/\sqrt{5}(-2, 0, 1)$ e que $\overline{AB} = (0, 0, 1)$, logo

$$\overline{NB} = ((0, 0, 1) \cdot (1/\sqrt{5}(-2, 0, 1)))1/\sqrt{5}(-2, 0, 1) = (-2/5, 0, 1/5).$$

Logo

$$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = (0, 0, 1) - (-2/5, 0, 1/5) = (2/5, 0, 4/5).$$

E a distância é $\sqrt{2^2 + 4^2}/5 = \sqrt{20}/5 = \sqrt{4 \cdot 5}/5 = 2/\sqrt{5}$.

Observe que v. pode verificar que seus cálculos estão certos: o vetor $\overline{AN}$ deve ser perpendicular ao vetor diretor das retas (como pode ser verificado calculando o produto escalar, que é zero).

**(c)** Como as retas são paralelas vale qualquer ponto de $r_1$ (veja o comentário no início da resposta do item (b).

**(d)** Sejam $B = (1, 1, 1)$, $C = (5, 1, -1)$ (pontos de $r_1$) e $A = (1, 1, 0) \in r_2$. A área do paralelogramo procurado é o módulo do produto vetorial

$$\overline{BC} \times \overline{BA} = (4, 0, -2) \times (0, 0, -1) = (0, 4, 0).$$

Logo a área é quatro.

Observe que v. pode verificar este resultado. A área será $|\overline{BC}|\, d$ ($d$ é a distância no item anterior), pois a distância entre as retas é a altura do paralelogramo. Como $|\overline{BC}| = \sqrt{20}$ e $d = 2/\sqrt{5}$ temos

$$\sqrt{20}\,(2/\sqrt{5}) = (\sqrt{4 \cdot 5})(2/\sqrt{5}) = 4.$$

Ou seja os cálculos sã coerentes.

**(e)** Observe que se $D$ é o novo vértice temos

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{BC} = (0, 0, -1) + (4, 0, -2) = (4, 0, -3)$$

e que

$$D = B + (4,0,-3) = (1,1,1) + (4,0,-3) = (5,1,-2).$$

(verifique que este ponto está em $r_2$!)

**(f)** Um é o vetor diretor das retas, $u = (2,0,-1)$ e outro (por exemplo) o vetor $v = \overline{AB} = (0,0,1)$.

**(g)** O vetor normal ao plano é

$$u \times v = (2,0,-1) \times (0,0,1) = (0,-2,0).$$

Logo podemos escolher $n = (0,1,0)$ como vetor normal ao plano.

**(h)** A equação cartesiana é $0x+1y+0z = d$ onde $d$ é obtido pela condição $A \in \pi$, ou seja $y = 1$.

As equações paramétricas são (usando os vetores do item (f)) e o ponto $A = (1,1,0)$,

$$\{x = 1 + 2t + 0s \quad y = 1 + 0t + 0s, \quad z = 0 - t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, observando que $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ também são vetores paralelos ao plano (pois são ortogonais ao seu vetor normal $(0,1,0)$) e considerando o ponto $(0,1,0)$ do plano temos outras

$$\{x = t \quad y = 1 \quad z = s, \quad t, s \in \mathbb{R}\}.$$

**2)** Considere a reta $r$ dada pelas equações

$$x + y + z = 1, \quad x - y - z = 1$$

e o ponto $P = (1,0,1)$.

**a)** Determine o vetor diretor de $r$. (0.5 pts)

**b)** Determine as equações paramétricas de $r$. (0.5 pts)

**c)** Encontre um ponto $A$ de $r$ tal que o vetor $\overline{AP}$ seja ortogonal ao vetor diretor de $r$. (1.0 pts)

**d** Calcule a distância de $P$ à reta $r$. (0.5 pts)

**Resposta:**

**(a)** O vetor diretor $v$ de $r$ é obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos. Ou seja,

$$v = (1, 1, 1) \times (1, -1, -1) = (0, 2, -2),$$

isto é, podemos tomar $v = (0, 1, -1)$.

Outra forma seria resolver o sistema, restando a segunda da primeira equação temos

$$2y + 2z = 0, \quad y = -z.$$

Na primeira equação temos $x = 1 - y - z = 1 - y + y = 1$. Logo, escolhendo $y$ como parámentro, a equação da reta é

$$x = 1, \quad y = t, \quad z = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

E o vetor diretor é $(0, 1, -1)$. Observe que com este método resolvemos também o item (b).

**(b)** Se v. não resolveu o item (a) pelo segundo método é suficiente procurar um ponto do plano (por exemplo $(1, 0, 0)$) e escrever

$$x = 1 + 0t \quad y = 0 + t, \quad z = 0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**(c)** Considere um ponto da reta, por exemplo $Q = (1, 0, 0)$, e observe que

$$\overline{QP} = \overline{QA} + \overline{AP}, \quad \overline{QA} = (\overline{QP} \cdot \frac{v}{||v||})\frac{v}{||v||}$$

onde $v = (0, 1, -1)$ é o vetor diretor da reta. Se $A = (x, y, z)$ temos

$$\begin{aligned}(0, 0, 1) &= ((0, 0, 1) \cdot (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})) + (1 - x, -y, 1 - z) = \\ &= (0, -1/2, +1/2) + (1 - x, -y, 1 - z).\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = (x, y, z) = (0, -1/2, +1/2) - (0, 0, 1) + (1, 0, 1) = (1, -1/2, 1/2).$$

**(d)** O módulo do vetor $\overline{AP} = (0, 1/2, 1/2)$ é a distância procurada, $\sqrt{2}/2$.

Observe que há um modo de verificar que o resultado é coerente, o vetor $\overline{AP}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta (faça o produto escalar e veja que é zero).

**3)** Considere os planos definidos abaixo:

$\Pi = \{(x,y,z) \mid 2x+y-z=1\}, \quad \Pi' = \{(x,y,z) \mid x+3y-z=-1\}$

**a)** Encontre um terceiro plano $\Pi''$ tal que a interseção dos três planos $\Pi$, $\Pi'$ e $\Pi''$ seja um único ponto. (1.0 pts)

**b)** Encontre um terceiro plano $\Pi''$ (diferente de $\Pi$ e $\Pi'$) tal que a interseção dos três planos $\Pi$, $\Pi'$ e $\Pi''$ planos seja uma reta. (1.0 pts)

**Resposta:** Para o item (a) é suficiente considerar um plano cujo vetor normal não esteja no plano (vetorial) gerado pelos vetores normais dos planos $\Pi$ e $\Pi'$. Por exemplo $\Pi'': x=0$.

Outra possibilidade é procurar um plano cujo vetor normal seja a reta de interseção de $\Pi$ e $\Pi'$. Este vetor normal é $(2,1,-1)\times(1,3,-1)=(2,1,5)$. Logo o plano procurado é (por exemplo) $2x+y+5z=0$. Deixamos para v. verificar que os três planos se intersetam em um ponto. (resolva o sistema!)

Para o item (b) fazemos o seguinte. Observe que $\Pi\cap\Pi'$ é uma reta $r$ (pois os planos não são paralelos). Se $\Pi\cap\Pi'\cap\Pi''$ é uma reta essa reta é necessariamente $r$!. Portanto, $r\subset\Pi''$. Então podemos escolher como $\Pi''$ qualquer plano que contenha $r$ e seja diferente dos outros dois planos.

Determinemos $r$. Seu vetor diretor já foi obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos $\Pi$ e $\Pi'$, $(2,1,5)$. Um ponto de $r$ é $(0,-1,-2)$. Logo $r\colon (2t,-1+t,-2+5t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Para determinar $\Pi''$ devemos encontrar um ponto que não pertença aos outros planos. Por exemplo, $P=(1,0,0)$. Então é suficiente considerar $\Pi''$ como o plano que contém a $r$ e a $P$. O vetor nomal $n$ do plano é perpendicular aos vetores diretores $(2,1,5)$ e $(1,1,2)$ do plano. Logo $n=(2,1,5)\times(1,1,2)=(-3,1,1)$. Logo $\Pi'': 3x-y-z=d$ onde $d$ é obtido por $(1,0,0)\in\Pi''$, $d=3$.

Outra solução é procurar planos da forma

$$\lambda(2x+y-z)+\mu(x+3y-z)=\lambda-\mu,$$

para $\lambda$ e $\mu$ não nulos (tomando $\lambda=2$ e $\mu=-1$ obtemos o plano anterior).