P1 de Álgebra Linear I – 2001.1

Data: 9 de abril de 2001.

Gabarito

1) Consider as retas

$$r_1 = \{(1,1,1) + t(4,0,-2), \quad t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{(1-2t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Estude a posição relativa das retas r_1 e r_2, isto é, descubra se são paralelas, reversas ou concorrentes. (0.5 pts)

b) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2. (1.0 pts)

c) Encontre um ponto P de r_1 tal que a distância de P a r_2 seja igual a distância entre r_1 e r_2. (0.5 pts)

d) Determine a área paralelogramo com vértices $(1,1,1)$, $(5,1,-1)$ (pontos de r_1) e $(1,1,0) \in r_2$ (não é dado o quarto vértice). (1.0 pts)

e) Determine o paralelogramo com vertices $(1,1,1)$, $(5,1,-1)$ (pontos de r_1), $(1,1,0) \in r_2$ e o quarto vértice em r_2. (0.5 pts)

f) Considere o plano π que contém as duas retas r_1 e r_2. Determine dois vetores paralelos ao plano π que não sejam colineares. (0.5 pts)

g) Determine o vetor normal do plano π. (0.5 pts)

h) Determine as equações cartesianas e paramétricas do plano π. (0.5 + 0.5 pts)

Resposta:

(a) Os vetores diretores da retas são colineares $(4,0,-2) = -2(-2,0,1)$. Portanto, as retas ou são iguais ou são paralelas (diferentes). Para decidir é suficiente ver se o ponto $(1,1,1) \in r_1$ está em r_2, isto é, se é possível achar t tal que

$$1 = 1 - 2t, \quad 1 = 1 + 0t, \quad 1 = 0 + t.$$

Da primeira equação temos $t = 0$, que na terceira dá $1 = 0$. Logo as retas são paralelas e diferentes.

(b) Como as retas são paralelas a distância d de r_1 a r_2 é a distância de qualquer ponto de r_2 a r_1. Escolhemos os pontos $A = (1,1,0) \in r_2$ e $B = (1,1,1) \in r_1$. Se N é o ponto de r_1 mais próximo de A teremos $d = |\overline{AN}|$ e

$$\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB},$$

onde

$$\overline{NB} = (\overline{AB} \cdot v)v,$$

onde v é um vetor diretor unitário de r_1. Temos que $v = 1/\sqrt{5}(-2,0,1)$ e que $\overline{AB} = (0,0,1)$, logo

$$\overline{NB} = ((0,0,1) \cdot (1/\sqrt{5}(-2,0,1)))1/\sqrt{5}(-2,0,1) = (-2/5, 0, 1/5).$$

Logo

$$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = (0,0,1) - (-2/5,0,1/5) = (2/5,0,4/5).$$

E a distância é $\sqrt{2^2+4^2}/5 = \sqrt{20}/5 = \sqrt{4 \cdot 5}/5 = 2/\sqrt{5}$.

Observe que v. pode verificar que seus cálculos estão certos: o vetor $\overline{AN}$ deve ser perpendicular ao vetor diretor das retas (como pode ser verificado calculando o produto escalar, que é zero).

(c) Como as retas são paralelas vale qualquer ponto de r_1 (veja o comentário no início da resposta do item (b).

(d) Sejam $B = (1,1,1)$, $C = (5,1,-1)$ (pontos de r_1) e $A = (1,1,0) \in r_2$. A área do paralelogramo procurado é o módulo do produto vetorial

$$\overline{BC} \times \overline{BA} = (4,0,-2) \times (0,0,-1) = (0,4,0).$$

Logo a área é quatro.

Observe que v. pode verificar este resultado. A área será $|\overline{BC}|\, d$ (d é a distância no item anterior), pois a distância entre as retas é a altura do paralelogramo. Como $|\overline{BC}| = \sqrt{20}$ e $d = 2/\sqrt{5}$ temos

$$\sqrt{20}\,(2/\sqrt{5}) = (\sqrt{4 \cdot 5})(2/\sqrt{5}) = 4.$$

Ou seja os cálculos sã coerentes.

(e) Observe que se D é o novo vértice temos

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{BC} = (0,0,-1) + (4,0,-2) = (4,0,-3)$$

e que

$$D = B + (4,0,-3) = (1,1,1) + (4,0,-3) = (5,1,-2).$$

(verifique que este ponto está em r_2!)

(f) Um é o vetor diretor das retas, $u = (2,0,-1)$ e outro (por exemplo) o vetor $v = \overline{AB} = (0,0,1)$.

(g) O vetor normal ao plano é

$$u \times v = (2,0,-1) \times (0,0,1) = (0,-2,0).$$

Logo podemos escolher $n = (0,1,0)$ como vetor normal ao plano.

(h) A equação cartesiana é $0x+1y+0z = d$ onde d é obtido pela condição $A \in \pi$, ou seja $y = 1$.

As equações paramétricas são (usando os vetores do item (f)) e o ponto $A = (1,1,0)$,

$$\{x = 1 + 2t + 0s \quad y = 1 + 0t + 0s, \quad z = 0 - t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, observando que $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ também são vetores paralelos ao plano (pois são ortogonais ao seu vetor normal $(0,1,0)$) e considerando o ponto $(0,1,0)$ do plano temos outras

$$\{x = t \quad y = 1 \quad z = s, \quad t, s \in \mathbb{R}\}.$$

2) Considere a reta r dada pelas equações

$$x + y + z = 1, \quad x - y - z = 1$$

e o ponto $P = (1,0,1)$.

a) Determine o vetor diretor de r. (0.5 pts)

b) Determine as equações paramétricas de r. (0.5 pts)

c) Encontre um ponto A de r tal que o vetor $\overline{AP}$ seja ortogonal ao vetor diretor de r. (1.0 pts)

d Calcule a distância de P à reta r. (0.5 pts)

Resposta:

(a) O vetor diretor v de r é obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos. Ou seja,

$$v = (1,1,1) \times (1,-1,-1) = (0,2,-2),$$

isto é, podemos tomar $v = (0,1,-1)$.

Outra forma seria resolver o sistema, restando a segunda da primeira equação temos

$$2y + 2z = 0, \quad y = -z.$$

Na primeira equação temos $x = 1 - y - z = 1 - y + y = 1$. Logo, escolhendo y como parámentro, a equação da reta é

$$x = 1, \quad y = t, \quad z = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

E o vetor diretor é $(0,1,-1)$. Observe que com este método resolvemos também o item (b).

(b) Se v. não resolveu o item (a) pelo segundo método é suficiente procurar um ponto do plano (por exemplo $(1,0,0)$) e escrever

$$x = 1 + 0t \quad y = 0 + t, \quad z = 0 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Considere um ponto da reta, por exemplo $Q = (1,0,0)$, e observe que

$$\overline{QP} = \overline{QA} + \overline{AP}, \quad \overline{QA} = (\overline{QP} \cdot \frac{v}{||v||})\frac{v}{||v||}$$

onde $v = (0,1,-1)$ é o vetor diretor da reta. Se $A = (x,y,z)$ temos

$$\begin{aligned}(0,0,1) &= ((0,0,1)\cdot(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}))(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})) + (1-x,-y,1-z) = \\ &= (0,-1/2,+1/2) + (1-x,-y,1-z).\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = (x,y,z) = (0,-1/2,+1/2) - (0,0,1) + (1,0,1) = (1,-1/2,1/2).$$

(d) O módulo do vetor $\overline{AP} = (0,1/2,1/2)$ é a distância procurada, $\sqrt{2}/2$.

Observe que há um modo de verificar que o resultado é coerente, o vetor $\overline{AP}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta (faça o produto escalar e veja que é zero).

3) Considere os planos definidos abaixo:

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 1\}, \quad \Pi' = \{(x, y, z) \mid x + 3y - z = -1\}$$

a) Encontre um terceiro plano Π'' tal que a interseção dos três planos Π, Π' e Π'' seja um único ponto. (1.0 pts)

b) Encontre um terceiro plano Π'' (diferente de Π e Π') tal que a interseção dos três planos Π, Π' e Π'' planos seja uma reta. (1.0 pts)

Resposta: Para o item (a) é suficiente considerar um plano cujo vetor normal não esteja no plano (vetorial) gerado pelos vetores normais dos planos Π e Π'. Por exemplo $\Pi'': x = 0$.

Outra possibilidade é procurar um plano cujo vetor normal seja a reta de interseção de Π e Π'. Este vetor normal é $(2, 1, -1) \times (1, 3, -1) = (2, 1, 5)$. Logo o plano procurado é (por exemplo) $2x + y + 5z = 0$. Deixamos para v. verificar que os três planos se intersetam em um ponto. (resolva o sistema!)

Para o item (b) fazemos o seguinte. Observe que $\Pi \cap \Pi'$ é uma reta r (pois os planos não são paralelos). Se $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$ é uma reta essa reta é necessariamente r!. Portanto, $r \subset \Pi''$. Então podemos escolher como Π'' qualquer plano que contenha r e seja diferente dos outros dois planos.

Determinemos r. Seu vetor diretor já foi obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos Π e Π', $(2, 1, 5)$. Um ponto de r é $(0, -1, -2)$. Logo $r\colon (2t, -1 + t, -2 + 5t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Para determinar Π'' devemos encontrar um ponto que não pertença aos outros planos. Por exemplo, $P = (1, 0, 0)$. Então é suficiente considerar Π'' como o plano que contém a r e a P. O vetor nomal n do plano é perpendicular aos vetores diretores $(2, 1, 5)$ e $(1, 1, 2)$ do plano. Logo $n = (2, 1, 5) \times (1, 1, 2) = (-3, 1, 1)$. Logo $\Pi''\colon 3x - y - z = d$ onde d é obtido por $(1, 0, 0) \in \Pi''$, $d = 3$.

Outra solução é procurar planos da forma

$$\lambda(2x + y - z) + \mu(x + 3y - z) = \lambda - \mu,$$

para λ e μ não nulos (tomando $\lambda = 2$ e $\mu = -1$ obtemos o plano anterior).