P2 de Álgebra Linear I – 2001.1

Data: 16 de maio de 2001.

1) Considere os vetores

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (3,3,2), \quad u_4 = (2,2,2)$$

e o subespaço vetorial V gerado por u_1, u_2, u_3 e u_4.

a) Determine uma base β de V.

b) Determine uma base ortogonal β' de V.

c) Determine uma base ortogonal β'' de $\mathbb{R}^3$ que contenha β'.

d) Veja se $(2,2,4)$ pertence a V.

e) Escreva o vetor $(5,5,3)$ como combinação linear dos vetores da base β.

2) Considere as transformações lineares

$$T(x,y) = (x+3y, 2x+4y), \quad S(x,y) = (5x+7y, 6x+8y).$$

Determine explicitamente as matrizes das transformações lineares T, S, $T \circ S$ e $S \circ T$.

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como a projeção ortogonal na reta $r\colon \{(t,3t),\, t \in \mathbb{R}\}$.

a) Determine a matriz de T.

b) Calcule $T(1,3)$ e $T(-3,1)$.

4) Considere o vetor $v_0 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e defina a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times v_0.$$

a) Determine o conjunto dos vetores v tais que $T(v) = 0$.

b) Estude se existe algum vetor v tal que $T(v) = v_0$.

c) Estude se existe algum vetor v tal que $T(v) = v$.

d) Determine a forma geral de T e sua matriz $[T]$.

e) É T inversível?