Métodos de Integração

Notas de aula relativas aos dias 14 e 16/01/2004

Já conhecemos as regras de derivação e o Teorema Fundamental do Cálculo. Este diz essencialmente que se f for uma função "bem comportada", e conhecermos uma função F tal que $F' = f$ (ou seja, F é uma anti-derivada de f), então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo aponta então um bom método para calcular uma integral definida: encontrar uma anti-derivada e determinar sua variação no intervalo de interesse. Por este motivo, buscamos nas propriedades das derivadas alguns dos chamados métodos de integração. Neste texto tratamos dos métodos de integração resultantes das duas principais regras de derivação: a regra do produto (ou regra de Leibniz) e a regra da cadeia.

1 A Integral por Partes

Começando pela regra do produto de derivadas, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para chegar a uma expressão a primeira vista ingênua, mas que se mostra de grande utilidade.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções bem comportadas. Sabemos que

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{2}$$

Fazendo então a integral indefinida de todas essas expressões, obtemos

$$\int (fg)'\,dx = \int f'g\ dx + \int fg'\ dx, \tag{3}$$

que pode ser reescrita como

$$\int fg'\ dx = \int (fg)'\ dx - \int f'g\ dx. \tag{4}$$

Agora usamos o Teorema Fundamental do Cálculo, que nos diz que

$$\int (fg)'\ dx = fg + C, \tag{5}$$

e portanto a expressão (4) pode ser reescrita como

$$\int fg'\ dx = fg - \int f'g\ dx, \tag{6}$$

onde a constante C não precisa ser escrita pois a igualdade acima é uma igualdade entre anti-derivadas (dito de outra maneira, em cada membro temos um $+C$).

A expressão (6) é uma maneira de escrever o chamado método de integração por partes, onde de fato, trocamos o trabalho de resolver uma integral por outra. Pode não parecer de grande valia, em uma primeira e apressada opinião, mas os exemplos seguintes tratam de tentar mudar tal opinião.

- Vamos resolver a integral $\int x\ e^x\ dx$. Para isso, sejam $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Usando (6) temos

$$\int x\ e^x\ dx = x\ e^x - \int 1\ e^x\ dx = (x-1)\, e^x + C. \tag{7}$$

- Da mesma forma, resolvemos $\int x^2 e^x\ dx$, agora fazendo $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$. Assim,

$$\int x^2 e^x\ dx = x^2 e^x - \int 2x\ e^x\ dx, \tag{8}$$

  e a última integral é rsolvida usando o exemplo anterior. Assim

$$\int x^2 e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + C. \tag{9}$$

- Assim, $\int x^n e^x\ dx$, com n natural, pode ser resolvida ou fazendo n integrações por partes, ou demonstrando por indução uma fórmula para ela.

- Também podemos resolver $\int x \cos x\ dx$. Para isso, façamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$ para obter

$$\int x \cos x\ dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C. \tag{10}$$

- Agora queremos resolver $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$. O primeiro passo será uma integração por partes, usando $f(x) = g'(x) = \operatorname{sen} x$. Assim

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x - \int \left(-\cos^2 x\right)\ dx, \tag{11}$$

  onde agora se utiliza a relação fundamental da trigonometria ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) para escrever

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1\ dx - \int \operatorname{sen}^2 x\ dx, \tag{12}$$

  que é uma equação para $\int \operatorname{sen}^2 x\ dx$, que uma vez resolvida diz que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen} x \cos x\right) + C. \tag{13}$$

- Agora queremos obter a integral $\int e^x \cos x \; dx$. Para isso fazemos uma integração por partes, usando $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$. Assim,

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \text{ sen } x - \int e^x \text{ sen } x \; dx, \tag{14}$$

e uma nova integração por partes será usada, agora com $f(x) = e^x$ e $g'(x) = -\text{ sen } x$:

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \; dx. \tag{15}$$

Novamente podemos ver esta relação como uma equação que nos permite isolar a integral desejada, obtendo

$$\int e^x \cos x \; dx = \frac{e^x}{2} \left(\text{ sen } x + \cos x \right) + C. \tag{16}$$

- Por fim, queremos calcular a integral $\int \ln x \; dx$. Nesta usaremos a integração por partes com $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$:

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \; dx = x (\ln x - 1) + C. \tag{17}$$

Encerramos esse assunto com alguns exercícios:

1. $\int x^3 e^x \; dx$;
2. $\int x \text{ sen } x \; dx$;
3. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \; dx$;
4. $\int x \ln x \; dx$;
5. $\int \frac{\ln x}{x} \; dx$;
6. $\int (\ln x)^2 \; dx$;
7. $\int_0^1 x \; e^{-x} \; dx$.

2 Integração por Substituição ou Mudança de Variável

Agora nosso ponto de partida é a *regra da cadeia* para a derivação de funções compostas. Recordando, estamos no caso em que $y = f(x)$ e $z = g(y)$. A composição então é considerar $z = g \circ f(x)$ (faça uma figura para visualizar melhor). A regra da cadeia diz então que se todas essas funções são diferenciáveis, então

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x), \tag{18}$$

que pode ser entendida como "a derivada da composição é o produto das derivadas calculadas one fazem sentido."

Podemos agora considerar a antiderivada da expressão (18). Assim

$$\int (f \circ g)' (x) \ dx = \int f' (g (x)) \cdot g' (x) \ dx, \tag{19}$$

onde o primeiro membro sugere a aplicação do *teorema fundamental do cálculo*, que diz que

$$\int (f \circ g)' (x) \ dx = f \circ g (x) + C. \tag{20}$$

Mas se na relação (20) usamos que $y = g(x)$ e novamente nos utilizamos do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int (f \circ g)' (x) \ dx = f (y) + C = \int f' (y) \ dy. \tag{21}$$

Por fim, as relações (19) e (21) trazem a igualdade

$$\int f' (y) \ dy = \int f' (g (x)) \cdot g' (x) \ dx, \tag{22}$$

Onde já podemos reconhecer a essência do chamado método de *substituição*, ou de *mudança de variável*. Apenas para tomar sua forma mais habitual, como não fizemos qualquer restrição sobre a função f', podemos chamá-la h e reescrever a expressão anterior como

$$\int h (y) \ dy = \int h (g (x)) \cdot g' (x) \ dx. \tag{23}$$

Antes de passarmos a exemplos que mostram a utilidade do método cabe justificar seus nomes e entender melhor seu significado: de fato a expressão (23) diz como devemos escrever uma integral equivalente a $\int h(y)\, dy$ onde substituímos y por $g(x)$. Isso significa que a nova integral será feita na variável x e se lembrarmos que o dy da integral nos lembra do Δy das somas de Riemann, torna-se claro que precisamos também reescrever o dy da integral em termos da nova variável x. Esse é o papel do termo $g'(x)\, dx$, que pode também ser compreendido lembrando de como usamos derivadas para fazer aproximações lineares: se Δx é pequeno, $\Delta y \approx g'(x)\, \Delta x$.

Vamos agora passar aos exemplos

- Vamos começar pela integral

$$\int \cos \left(x^2\right) x \ dx, \tag{24}$$

onde vamos fazer uso da substituição $y = x^2$ e portanto $dy = 2xdx$. Assim

$$\int \cos \left(x^2\right) x \ dx = \int \cos (y) \ \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \text{ sen } (y) + C = \text{ sen } \left(x^2\right) + C, \tag{25}$$

onde na segunda igualdade usamos diretamente o conceito de antiderivada, e na terceira reescrevemos o resultado final em termos da variável original x. O leitor deve calcular a derivada da resposta obtida para verificar sua adequação.

- Do mesmo modo, para resolver a integral

$$\int xe^{x^2}\ dx, \tag{26}$$

fazemos uso da mudança de variável $y = x^2$, $dy = 2xdx$ e obtemos

$$\int xe^{x^2}\ dx = \int e^y\ \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \tag{27}$$

- Para resolver a integral

$$\int x^2 \cos\left(x^3\right)\ dx, \tag{28}$$

podemos fazer uso da substituição $y = x^3$, $dy = 3x^2dx$, com a qual obtemos

$$\int x^2 \cos\left(x^3\right)\ dx = \int \cos y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\ \text{sen}\ y + C = \frac{1}{3}\ \text{sen}\ \left(x^3\right) + C. \tag{29}$$

- A integral

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx \tag{30}$$

pode ser resolvida de várias maneiras. Fica como exercício para o leitor usar a substituição $z = x^3$ para resolvê-la. Aqui vamos usar $y = x^3 + 1$ e portanto $dy = 3x^2dx$. Com ela temos

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\ln y + C = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right) + C. \tag{31}$$

Completamos esse texto com uma rápida discussão sobre mudança de variáveis em integrais definidas. De certa forma, o leitor j tem todos os igredientes em mãos, pois o teorema fundamental do cálculo diz que basta conhecer uma antiderivada e calcular sua variação no intervalo de interesse para ter o valor de uma integral definida, e o método de substituição pode ser usado para obter tal antiderivada. Porém, basta lembrar-mos que

$$\int_c^d f\left(y\right)\ dy \tag{32}$$

significa a integral de $f(y)$ quando y varia de c até d, para concluirmos que a versão do método de mudança de variáveis para integrais definidas pode ser escrito como

$$\int_c^d f(y)\ dy = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\, g'(x)\, dx, \tag{33}$$

onde usamos a substituição $y = g(x)$ e $g^{-1}(c)$ denota o valor de x tal que $g(x)$ corresponde ao valor c (da mesma forma para d). Outra maneira mais prática de escrever a mesma coisa é:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy. \tag{34}$$

Nesta última os limites de integração devem ficar bem claros: no primeiro membro, x varia de a até b, no segundo, correspondentemente, $y = g(x)$ varia de $g(a)$ a $g(b)$. Assim, usando o exemplo previamente calculado (como integral indefinida, eq. (31)), temos

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \int_2^9 \frac{1}{y}\frac{dy}{3} = \frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 2), \tag{35}$$

o mesmo resultado que seria obtido usando uma antiderivada calculada em (31).

Exercícios:

1. $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\ dx$;
2. $\int$ sen $^2 x \cos x\ dx$;
3. $\int_0^1 x^3\left(1+x^4\right)\ dx$;
4. $\int_0^\infty x e^{-x^2}\ dx$;
5. $\int \frac{dx}{x+5}$;
6. $\int \frac{\ln x}{x}\ dx$;
7. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$;
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ sen $^{10} x \cos x\ dx$.