PASSEIOS ALEATÓRIOS E REDES ELÉTRICAS

Aluno: Daniel Fleischman
Orientador: Lorenzo Justiniano Dias Casado

Introdução

Estudamos passeios aleatórios em redes finitas e, posteriormente, infinitas com uma, duas, três ou mais dimensões. O nosso estudo foi baseado no livro "Random Walks on Electric Networks" de Peter G. Doyle e J. Laurie Snell, aonde vimos diferentes métodos para resolver problemas de passeios aleatórios e formas para relacioná-los com redes elétricas.

Passeios Aleatórios em Uma Dimensão

Um caso típico de passeio aleatório em uma dimensão é quando queremos encontrar a probabilidade, p(x), de um homem bêbado começando em qualquer posição x de uma rua que pertence ao intervalo de números inteiros de 0 a N (sendo 0 e N os pontos de fronteira e os demais pontos interiores), na qual ele só tem duas direções para ir, chega na sua casa antes do bar, sabendo que quando ele chega em um desses dois lugares ele permanece lá e também que a sua casa não é o bar.

As propriedades básicas desse problema são:

$$(a) \rightarrow p(0) = 0$$

$$(b) \rightarrow p(N) = 1$$

$$(c) \rightarrow p(x) = (1/2)p(x-41) + (1/2)p(x+1)$$

$$x = 1,2,\ldots,N-1$$

As propriedades (a) e (b) são justificadas pelo fato de termos convencionado 0 e N como armadilhas, ou seja, ao chegar nesses pontos o bêbado permanece lá. Já a propriedade (c) diz que para um ponto interior, a probabilidade de se chegar em casa partindo de x é a média das probabilidades p(x-1) e p(x+1), que são as probabilidades de se chegar em casa partindo dos pontos adjacentes a x. Podemos derivar (c) do seguinte fato básico a respeito de probabilidade que diz que se temos um evento E e dois outros eventos F e G sendo que um e somente um desses dois ocorrerá e então:

$$p(E) = p(F)p(E/F) + p(G)p(E/G)$$

No nosso caso, E é o evento "o bêbado termina no bar", F é o evento "o primeiro passo é para a esquerda" e G é o evento "o primeiro passo é para a direita", sendo assim, temos a propriedade (c).

Agora, consideremos um problema aparentemente diferente desse no qual queremos saber a voltagem, v(x), em uma rede de resistores iguais conectados em série pelos quais passamos uma voltagem de 1 volt, sendo que temos no total N resistores. Temos também que v(0) é 0 e v(N) é 1, portanto, as propriedades (a) e (b) também são satisfeitas por v(x). Além disso, podemos verificaremos que v(x) também satisfaz (c).

As Leis de Kirchhoff dizem que a corrente que entra no resistor x deve ser igual a corrente que sai do mesmo e pela Lei de Ohm, se os pontos x e y são conectados por uma resistência de magnitude R, então a corrente i_{xy} que flui de x para y é:

$$i_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{R}$$

Sendo que para x=1,2,...,N-1:

$$\frac{v(x-1)-v(x)}{R}+\frac{v(x+1)-v(x)}{R}=0$$
$$v(x)=\frac{v(x+1)+v(x-1)}{2}$$
$$x=1,2,\ldots,N-1$$

Portanto, temos que a propriedade (c) também é satisfeita por v(x) e então podemos nos perguntar se p(x) e v(x) são iguais. Antes de responder a essa pergunta, é importante mostrar que as duas funções são harmônicas já que tem a propriedade (c) e, além disso, elas possuem os mesmos valores de fronteira devido às propriedades (a) e (b). Percebemos que p(x) é igual a v(x) por causa do Princípio da Unicidade, que nos diz que para todo x pertencente ao domínio, S, que podem ser os quarteirões da rua em que o bêbado caminha ou os resistores em série da rede elétrica, duas funções harmônicas no mesmo domínio com as mesmas propriedades são iguais para todo x.

Chegaremos ao Princípio da Unicidade através do Princípio do Máximo, que diz que uma função harmônica f(x) definida em S tem o seu valor máximo M e seu valor mínimo m na fronteira. A prova disso é que se temos M como o maior valor de f, se tivermos um f(x)=M para um x interior, o mesmo deve ser verdade para f(x-1) e f(x+1), já que f(x) é a média desses dois valores. Se x-1 ainda é um ponto interior, teremos que o mesmo argumento implica em f(x-2)=M e, portanto, teremos que f(0)=M. O mesmo argumento serve para o valor mínimo m.

O Princípio da Unicidade diz que f(x) e g(x) são funções harmônicas em S, sendo que f(x)=g(x) para os pontos de fronteira, então f(x)=g(x) para todo x. Para provarmos isso, criamos um h(x)=f(x)-g(x) e, se x for um ponto interior:

$$\frac{h(x-1)+h(x+1)}{2}=\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}-\frac{g(x-1)+g(x+1)}{2}=f(x)-g(x)=h(x)$$

Sendo que h é harmônica, h(x)=0 para os pontos de fronteira e, pelo Princípio do Máximo, o valor máximo e o mínimo de h são 0. Logo, h(x)=0 para todo x e, portanto, f(x)=g(x) para todo x. A prova que p(x)=v(x) foi demonstrada tão extensamente para mostrar que ambas retratam o mesmo problema e que essa similaridade pode ser utilizada em outros casos mais complexos do que os problemas em uma dimensão.

Passeios Aleatórios em Duas Dimensões

Um passeio aleatório em duas dimensões é um pouco mais complicado, entretanto é bem parecido com o caso anterior. Nesse caso, temos que o domínio, S, que é a união dos pontos de fronteira, que formam o conjunto B, com os interiores, que formam o conjunto D, deve ser finito, sendo que D e B não podem ter pontos comuns, todo ponto de D tem que ter 4 pontos adjacentes em S e todo ponto de B tem que ter pelo menos um dos seus quatro pontos adjacentes em D. Além disso, também devemos assumir que para quaisquer dois pontos de S temos uma seqüência de pontos de D que formam um caminho entre esses dois pontos. Exatamente como fizemos para um passeio aleatório em uma dimensão, iremos provar que p(x)=v(x).

Uma função f definida em S é harmônica se, para pontos (a,b) de D, ela tem a seguinte propriedade:

$$f(a,b)=\frac{f(a+1,b)+f(a-1,b)+f(a,b+1)+f(a,b-1)}{4}$$

Sendo que não há restrição para os valores de f nos pontos de fronteira.

Sabemos que p(x) é harmônica porque tem a propriedade acima, mas para analisarmos se v(x) é harmônica, devemos novamente utilizar as Leis de Kirchhoff, lembrando que corrente entrando em x=(a,b) é:

$$\frac{v(a+1,b)-v(a,b)}{R}+\frac{v(a-1,b)-v(a,b)}{R}+\frac{v(a,b+1)-v(a,b)}{R}+\frac{v(a,b-1)-v(a,b)}{R}=0$$

$$v(a,b)=\frac{v(a+1,b)+v(a-1,b)+v(a,b+1)+v(a,b-1)}{4}$$

Logo, p(x) e v(x) são funções harmônicas com os mesmos valores de fronteira e ao estendermos o Princípio de Unicidade para duas dimensões, podemos provar que elas são iguais. Isso pode ser feito porque o Princípio do Máximo também vale para duas dimensões e também porque a diferença entre duas funções harmônicas é harmônica, ou seja, o Princípio da Unicidade também é válido nesse caso.

Além disso, também estudamos diferentes métodos para encontrar a solução desse problema. O primeiro que vimos foi o método Monte Carlo, nomeado assim por causa do cassino famoso de Monte Carlo e que consiste em simularmos um número razoável de tentativas para obtermos a probabilidade aproximada de escape para cada ponto x. Essa solução é validada pela lei dos grandes números da teoria da probabilidade e então a estimativa obtida dessa maneira sempre se aproximará do valor real. Esse método, no entanto, requere um número grande de simulações para que possamos obter uma precisão mínima e então acaba sendo um pouco ineficaz.

Vimos também o método dos relaxamentos que é muito mais eficaz porque requer menos recursos computacionais necessários para se obter a precisão desejada. Nesse método, começamos escolhendo uma função que possui os valores de fronteira especificados e ajustamos os pontos interiores para serem a média dos valores de seus vizinhos. Depois de ajustarmos todos os pontos interiores, teremos uma função que ainda não é harmônica, mas que já é mais harmônica do que a nossa função inicial. Portanto, repetimos esse método quantas vezes for necessário para obtermos a precisão desejada.

Além desses dois métodos, também estudamos a solução para esse problema através da resolução de equações lineares, que nos permitem encontrar uma resposta exata. Nesse método, construímos uma equação que diz a probabilidade de escape para cada ponto interno, ou seja, que não está na fronteira, e então, após escrevermos essas equações com matrizes, podemos resolvê-las e encontrar a resposta. O quarto método estudado foi a solução para esse problema através do método das Cadeias de Markov, que pode ser considerado um método mais sofisticado que o método das equações lineares.

Interpretações para Redes Elétricas Gerais

Primeiramente, vimos a definição de grafo: coleção finita de pontos (vértices) sendo que existem certos pares de pontos conectados por ramos. Um grafo é considerado conectado se é possível ir de entre quaisquer dois pontos percorrendo os ramos. Consideremos um grafo conectado G com uma certa resistência R_{xy} entre os pontos x e y. Sabemos que a condutância desse ramo xy será $C_{xy}=1/R_{xy}$.

Um passeio aleatório em G pode ser definido como uma cadeia de Markov com matriz de transição $P_{xy}=C_{xy}/C_x$. Sabendo que C_x é o somatório de todas as condutâncias dos ramos que saem de x e vão para os pontos adjacentes y. Como o grafo é conectado, teremos uma cadeia de Markov ergódiga, que possui o vetor de probabilidade único w que é um vetor fixo para P, sendo wP=w. Sendo que cada componente w_j de w representa o número de vezes que o bêbado estará no estado j. Passeios aleatórios em redes elétricas tem o vetor fixo $w_x=C_x/C$ sendo C o somatório das condutâncias para todo x. Além de ser ergódiga, cadeias de Markov associadas com redes também são reversíveis se $w_xP_{xy}=w_yP_{yx}$ para todo x,y. A reversibilidade implica que a probabilidade de que ocorra a mudança de um estado para outro é a mesma de que se ocorresse a mudança inversa. Generalizando, quando uma cadeia de Markov reversível iniciada no seu estado de equilíbrio (com as propriedades de w), as probabilidades para seqüências na ordem correta do tempo são as mesmas se invertêssemos a direção do passar do tempo.

Se P é qualquer matriz ergódiga reversível, então P é a matriz de transição para um passeio aleatório em uma rede elétrica e só precisamos determinar $C_{xy}=w_xP_{xy}$. Lembrando que se P_{xx} não for nulo, a rede resultante precisará de uma condutância de x para x. Logo, a reversibilidade caracteriza essas cadeias ergódigas que surgem de redes elétricas. Isso se deve ao fato que as leis da física que controlam o comportamento de correntes elétricas estáveis não variam com a inversão da direção do tempo.

Outro ponto importante é que se todas as condutâncias de uma rede são iguais, o passeio aleatório associado no grafo G da rede terá a propriedade de que, partindo de cada ponto, a probabilidade de passarmos para cada um dos pontos adjacentes conectados por um ramo será igual. Quando isso ocorrer, teremos um passeio aleatório simples em G.

A interpretação probabilística da voltagem para uma rede elétrica geral é a que quando colocamos uma voltagem igual de 1 volt entre dois pontos a e b, sendo a voltagem em a igual à 1 e em b igual à 0, a voltagem em um ponto x representa a probabilidade de alguém realizando um passeio aleatório começando nesse ponto x, irá retornar para a antes de chegar em b.

Além disso, estudamos que a interpretação probabilística da corrente para uma rede elétrica é a que quando uma corrente unitária entra em a e sai em b, a corrente entre dois pontos x e y é igual ao número esperado de vezes que alguém realizando um passeio aleatório, começando em a e andando até chegar em b, passará de x para y.

Quando passamos uma voltagem v por dois pontos a e b, a voltagem $v_a=v$ se estabelece em a, $v_b=0$ e a corrente i_a entrará no circuito de uma fonte externa. A quantidade de corrente que passa depende da resistência geral do circuito. A resistência efetiva R_{EFF} entre a e b é $R_{EFFF}=v_a/i_a$. Além disso, a condutância efetiva é $C_{EFF}=1/R_{EFF}=i_a/v_a$. Esta, pode ser interpretada como a probabilidade de escape.

A Lei da Monotonicidade de Rayleigh

Um ponto importante estudado foi a Lei da Monotonicidade de Rayleigh que diz que se as resistências de um circuito aumentam, a resistência efetiva entre dois pontos só pode aumentar, e se as resistências diminuírem, a resistência efetiva só pode diminuir. Para provarmos essa lei chamaremos de i uma unidade de corrente que passa de a para b com os resistores R_{xy} e de j a unidade de corrente que passa de a para b com os resistores $\bar{R}_{xy}$ é maior ou igual R_{xy}. Então:

$$\overline{R}_{EFF} = \frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{xy}^2 \overline{R}_{xy} \geq \frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy}$$

Entretanto, já que j é uma unidade de corrente de a para b, o Princípio de Thomson nos diz que a energia dissipada, calculada para os resistores R_{xy}, é maior do que para as reais correntes determinadas por esses resistores, logo:

$$\frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy} \geq \frac{1}{2}\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} = R_{EFF}$$

Portanto, $\bar{R}_{EFF}$ é maior que R_{EFF}. A prova do caso em que as resistências diminuem é igual.

Para estudarmos a relação entre passeios aleatórios e a Lei da Monotonicidade de Rayleigh começamos com uma rede de ruas (condutâncias) nas quais um pedestre se move do ponto x para y com probabilidade $P_{xy}=C_{xy}/C_x$. Então, escolhemos dois pontos a e b, sendo que o pedestre começa em a e caminha até chegar em b ou até retornar ao ponto a. A probabilidade de que o pedestre, começando em x, chegue ao ponto a antes de b será chamado de v_x. Portanto, $v_a=1$ e $v_b=0$, e a função v_x é harmônica em todos os pontos x diferentes de a e

b. Chamaremos também p_{escape} a probabilidade de que o pedestre, começando em a, chega em b antes de retornar ao ponto a. Logo:

$$p_{escape} = 1 - \sum_x p_{ax} v_x$$

Sabendo que a condutância efetiva entre a e b é $C_a p_{escape}$, iremos mostrar que ela aumenta quando uma das condutâncias C_{rs} é aumentada. Se a e b são diferentes de r ou s, só precisamos mostrar que p_{escape} aumenta. Entretanto, ao invés de aumentarmos $C_{rs,}$ podemos adicionar uma ponte de condutância ε entre r e s. Agora, devemos provar que essa ponte aumenta a probabilidade de escape, uma vez que com ela surgem novas possibilidades de escape mas também de se retornar ao ponto inicial. Veremos que isso é verdade porque o pedestre atravessa a ponte mais vezes na boa direção, ou seja, na direção de escape.

Assumindo que a voltagem em r é maior do que em s, dizer que o pedestre cruza a ponte na boa direção é ir de r para s. Sendo u_x o número esperado de vezes que o pedestre está em x e u_{xy} o número esperado de vezes que ele cruza o ramo xy de x para y antes de chegar a b ou retornar ao ponto a. Sabemos que u_x/C_x é harmônica para x diferente de a e b com $u_a/C_a=1/C_a$ e $u_b/C_b=0$, mas a função v_x/C_a também tem essas propriedades e, portanto, pelo Princípio da Unicidade:

$$\frac{u_x}{C_x} = \frac{v_x}{C_a}$$

$$u_{rs} = u_r P_{rs} = u_r \frac{C_{rs}}{C_r} = v_r \frac{C_{rs}}{C_a}$$

$$u_{sr} = u_s P_{sr} = u_s \frac{C_{sr}}{C_s} = v_s \frac{C_{sr}}{C_a}$$

Como $C_{rs}=C_{sr}$, e já que assumimos que v_r é maior que v_s, isso significa que u_{rs} é maior que u_{sr}. Portanto, podemos ver que qualquer ramo leva o pedestre mais vezes para o lado mais favorável dos pontos do ramo.

Apesar de cruzar mais vezes a ponte na direção favorável ao escape, ainda não sabemos se a probabilidade de escape é maior com a ponte do que sem a mesma. Para analisarmos isso, devemos comparar a condutância antes e depois da colocação da ponte. Sabendo que a ponte tem condutância ε, colocaremos um ε sempre que quisermos mencionar um passeio com a ponte, ou seja, p^{ε}_{escape} denota a probabilidade de escape com a ponte. Além disso, sendo d^{ε} o número esperado de vezes que o pedestre vai de r para s, teremos:

$$d^{\varepsilon} = u_r^{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{C_r + \varepsilon} - u_s^{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{C_s + \varepsilon} = \left(\frac{u_r^{\varepsilon}}{C_r + \varepsilon} - \frac{u_s^{\varepsilon}}{C_s + \varepsilon} \right) \varepsilon$$

$$p_{escape}^{\varepsilon} = p_{escape} + (v_r - v_s) d^{\varepsilon}$$

Logo, assumindo que continuamos o passeio sem reutilizar a ponte, a cada vez que a ponte é utilizada de r para s a chance de escape aumenta em:

$$(1 - v_s) - (1 - v_r) = v_r - v_s$$

Portanto, para encontrarmos a probabilidade de escape com a ponte, pegamos a probabilidade de escape sem ela e a corrigimos adicionando a mudança provocada pela ponte, que é a diferença entre a probabilidade de escape original nos extremos da ponte multiplicada pelo número esperado de vezes que ela é percorrida.

Passeios Aleatórios em Redes Elétricas Infinitas

Em uma rede infinita, temos que um passeio aleatório é recorrente quando passamos pelo menos uma vez pelo ponto de que partimos e transiente quando a probabilidade disso ocorrer é nula. Portanto, a probabilidade de escape em uma cadeia recorrente é zero e em uma cadeia transiente é maior que zero.

O teorema de Pólya nos diz que um passeio aleatório simples em uma rede com dimensão d é recorrente somente quando d é igual a 1 ou 2 e que nos outros casos é transiente. Esse teorema foi provado através de relações entre passeios aleatórios em grafos e questões sobre correntes elétricas em redes de resistores correspondentes.

Para estabelecermos essas relações foi necessário utilizar várias vezes a idéia de Rayleigh de encurtar e cortar um circuito, que são equivalentes a Lei da Monotonicidade. Segundo Rayleigh, encurtar conjuntos de pontos juntos só pode diminuir a resistência efetiva da rede entre dois pontos dados e cortar certos ramos só pode aumentar a resistência efetiva entre dois dados pontos.

Conclusões

O estudo de passeios aleatórios e suas semelhanças com redes elétricas provou ser um tema muito interessante e digno de seu estudo, uma vez toda teoria probabilística aprendida, além de facilitar o meu entendimento das matérias cursadas cujo tema era probabilidade ou eletricidade em geral, era de meu particular interesse e foi visto de maneira objetiva.

Além disso, a iniciação científica serviu também para criar uma aproximação com o ramo acadêmico, normalmente esquecido pelos alunos, e que no futuro pode facilitar bastante uma carreira no mesmo ramo e também para o enriquecimento do currículo, uma vez que a iniciação científica é considerada uma experiência bastante válida no mercado de trabalho.

Referências

1 - DOYLE, P. G. e SNELL, J. L. **Random Walks and Electric Networks**.