Geometria e Probabilidade em $R^{n\to+\infty}$

O teorema de Dvoretsky-Milman

Roberto Imbuzeiro Oliveira (IMPA)

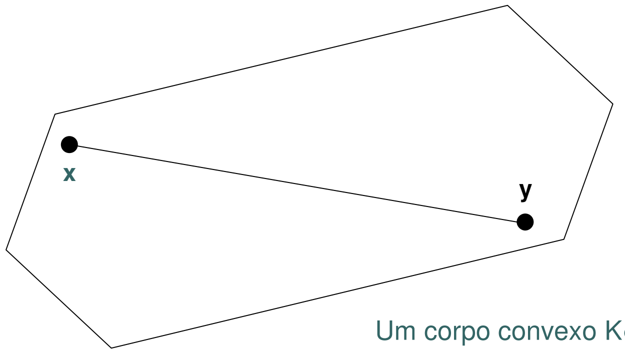
Oktobermat 2008, PUC-Rio

O que vem a seguir

- Fenômeno genérico surpreendente em "geometria em R^n com $n\to+\infty$".
- Casamento de geometria + concentração de medida (Prob.).
- A prova que veremos impulsionou estas áreas de pesquisa.

Os objetos básicos

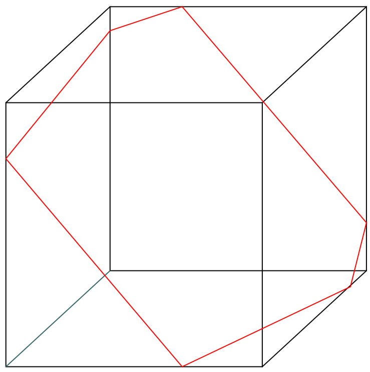
- Corpos convexos.



Um corpo convexo $K \subset R^2$

O que vamos estudar

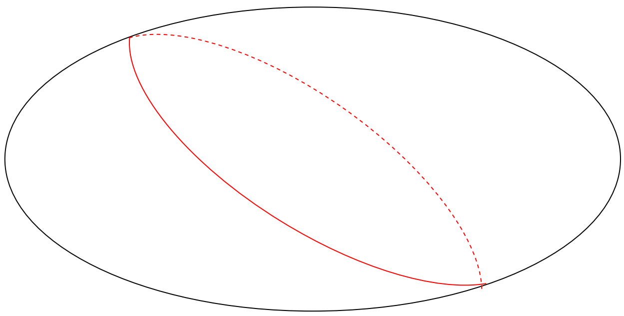
- A forma de seções de corpos convexos.



Interseção $C \cap P$ de um cubo $C \subset R^3$ com um plano P.

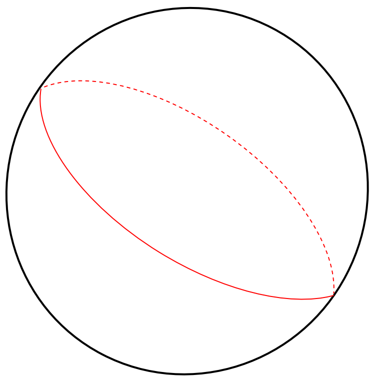
Exemplos

- Seções de politopos são politopos.
- Seções de elipsóides são elipsóides.



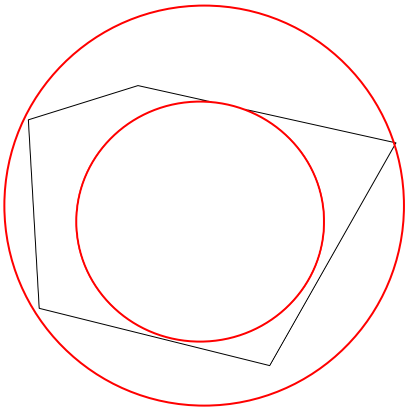
Seções de bolas são bolas

- $B = \{x \in R^n : |x| = (\sum_i x_i^2)^{1/2} \leq 1\}$



Seções quase bolas?

- Mediremos "distância" para uma bola.



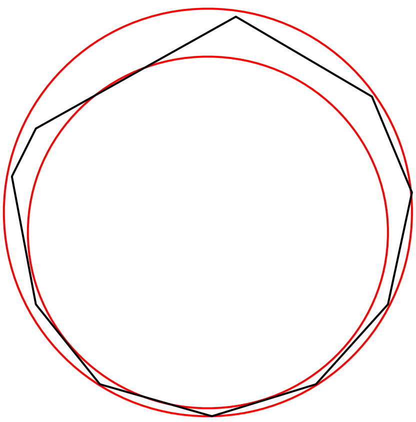
d(K) = inf R/ sup r -1

d(K) = 0 ⇔ K bola

d(K)≈ 0 ⇒ "quase bola"

Seções quase bolas

- Cubo C em $R^{exp(100000000)}$, espaço10-dim. P.



d(K) = 0,01

Na verdade, poderíamos obter d(K)<ε com um cubo em N(ε) dimensões.

Teorema de Dvoretsky (61)

- Para quaisquer $d\in N$, $\varepsilon>0$ existe um $N=N(d,\varepsilon)$ tal que, em dim. $n\geq N$:

  $\forall\, K\subset R^n$ corpo convexo *simétrico com relação a 0*

  $\exists\, P\subset R^n$ subespaço d-dimensional com:

  $$\mathbf{d(K\cap P)<\varepsilon.}$$

A extensão de Milman (71)

- Para quaisquer $d\in N$, $\varepsilon>0$ existe um $N=N(d,\varepsilon)\leq e^{10d/\varepsilon^3}$ t. q. em dim. $n\geq N$:

  $\forall\, K\subset R^n$ corpo convexo *simétrico com relação a 0*

  se $P\subset R^n$ subespaço d-dimensional é escolhido ao acaso,

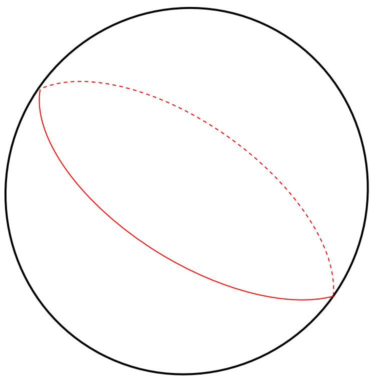
  $$\mathbf{Pr[d(K\cap P)<\varepsilon]\geq 1-n^{-\varepsilon/10}}$$

Diferenças fundamentais

- Cota melhor para N(d,ε).
- O fenômeno é genérico: acontece até por acaso.
- Prova via "Concentração de Medida", hoje fundamental em Geometria, Combinatória e Estatística.

Concentração de Medida

$$\Pr[|f(X) - \mathrm{Ex}[f(X)]| \geq t] \leq 2\exp(-nt^2/9)$$



- Esfera $S^{n-1} \subset R^n$
- X vetor aleatório uniforme sobre S^{n-1}.
- f: $S^{n-1} \to R$

  1-Lipschitz

  $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$

Exemplos

$\Pr[|f(X) - Ex[f(X)]| \geq t] \leq 2\exp(-nt^2/9)$

- $f(x) = x.v$ (v fixo, $|v| \leq 1$)
  - $Ex[f(X)]=0$
- $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$;
  - $Ex[f(X)] \approx (2 \ln n/n)^{1/2}$
- $f(x) = \sin^2\{(1-x_n^{\;2})^{1/2}\}$
  - $Ex[f(X)] \approx$?????

Exemplo útil a seguir

$\Pr[|f(X) - Ex[f(X)]| \geq t] \leq 2\exp(-nt^2/9)$

- $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$;
  - $Ex[f(X)] \approx (2 \ln n/n)^{1/2} =: M_n$
  - Use $t = \varepsilon M_n$

$\Pr[\max X_i \in [(1-\varepsilon)M_n,(1+\varepsilon)M_n]]$
$\geq 1 - 2n^{-\delta}$, onde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$.

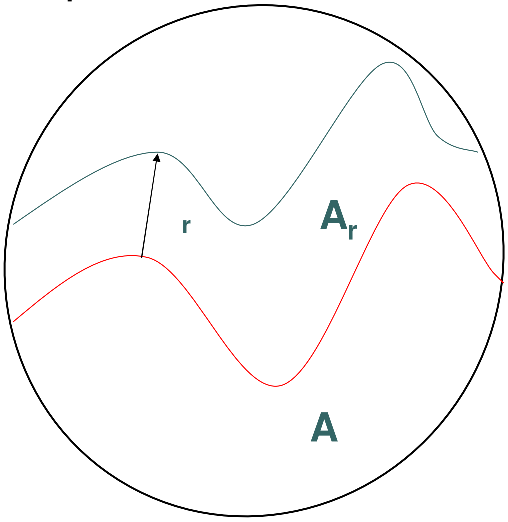
Daonde vem isso?

$\Pr[|f(X) - Ex[f(X)]| \geq t] \leq 2\exp(-nt^2/9)$

- Basicamente, vem da *curvatura positiva*.
- Concentração $\forall$ variedade M^n com

  Ricci(M) $\geq$ Ricci(esfera).

Daonde vem isso? (2)



- $\mu(A) \geq \varepsilon$

  $\Rightarrow$

  $\mu(A_r) \geq 1-\varepsilon$

Dvoretsky-Milman (p/ nós)

- Para quaisquer $d \in N$, $\varepsilon>0$ existe um $N=N(d,\varepsilon) \leq e^{10^{10}d/\varepsilon^3}$ t. q. em dim. $n \geq N$:

  $\forall K \subset R^n$ corpo convexo
  simétrico com relação a 0
  se $P \subset R^n$ subespaço d-dimensional
  é escolhido ao acaso,
  $Pr[d(K \cap P)<\varepsilon] \geq 1-n^{-\varepsilon/100000}$

A função f que usaremos

- Se $B \subset K \subset R^n$ é corpo convexo sim., $f(x) = ||x||_K = \inf\{t>0 : x/t \in K\}$ $(x \in R^n)$ é 1-Lipschitz e é norma:

  $||x||_K \geq 0$ e $||x||_K = 0 \Leftrightarrow x=0$
  $||\lambda x||_K = |\lambda|\ ||x||_K$ $(\lambda \in R)$
  $||x+y||_K \leq ||x||_K + ||y||_K$

  Além disso, $K = \{x \in R^n : ||x||_K \leq 1\}$

Detalhe técnico

- Precisamos de vetores ortogonais $\{v_1,\ldots,v_m\}$ em R^n com $m \geq n/2-1$e $||v_i||_K \geq 1/2$.
- Isto é possível e não é difícil (Dvoretsky-Rogers).
- Deveríamos trabalhar em $<v_1,\ldots v_m>$.

Reformulando o objetivo

- Um subespaço $P \subset R^n$ "funciona" se

  $\exists\, m_K \in (0,+\infty)$,

  $\forall\, y \in P$ com $|y|=1$,

  $(1-\varepsilon/3)m_K \leq ||y||_K \leq (1+\varepsilon/3)m_K$

  (ou $|\, ||y||_K - m_K \,| \leq (\varepsilon/3)\, m_K$).

  Usaremos abaixo $m_K = Ex[||X||_K]$.

Como escolher P

- $P_0 = \langle e_1, \ldots, e_d \rangle$
- R elemento de
  O(n) = {matrizes n x n ortogonais}
  escolhido ao acaso, unif.
- Tomamos $P = \{Rx : x \in P_0\}$.
- Fato: $\forall\, x \in P_0$, $|x|=1$,
  Rx é uniforme em S^{n-1}

Usando concentração

- $\forall\, x \in P_0$ com $|x|=1$,

$$\Pr[|\ ||Rx||_K - Ex[||Rx||_K]| \geq t] \leq 2\exp(-nt^2/8)$$

- Uma conta mostra que
  $m_K = Ex[||Rx||_K] = Ex[||X||_K]$
  $\geq 1/2 \max_{1\leq i\leq n}|Rx_i| \approx (\ln n/2n)^{1/2}$
- Tomando $t = \varepsilon\, m_K/3$, temos …

Deduzimos que

- $\forall\, x \in P_0$ com $|x|=1$,

$Pr[|\ ||Rx||_K - m_K| \geq (\varepsilon/3)\ m_K] \leq 2\exp(-2\varepsilon^2 \ln n/27)$

- Mas $P = \{Rx : x \in P_0\}$, então precisamos de:

$Pr[\exists x \in P_0,\ |x|=1,\ |\ ||Rx||_K - m_K| \geq \varepsilon m_K] \ll 1$

Usando ε-redes

- $N_\delta \subset P_0$ é uma δ-rede se
  - $\forall\, x \in S^{n-1}\ \exists\, x_\delta \in N_\delta$ com:

    $|x - x_\delta| \leq \delta$

    $\exists\ \delta$-rede com $\#\ N_\delta \leq \exp(2d/\delta)$

    Além disso, para que P funcione, basta que:

    $\forall\ x_{\varepsilon/6} \in N_{\varepsilon/6}$

    $|\ ||x||_K - m_K| \leq (\varepsilon/6) m_k$

Concluindo a prova

$\Pr[\exists x \in P_0, |x|=1, |\ \|Rx\|_K - m_K| \geq (\varepsilon/3)m_K]$

$\leq \Pr[\exists\ x \in N_{\varepsilon/6}, , |\ \|Rx\|_K - m_K| \geq (\varepsilon/6)m_K]$

$\leq \#\ N_{\varepsilon/6} \Pr[|\ \|Rx\|_K - m_K| \geq (\varepsilon/6)\ m_K]$

$\leq 2\exp(12d/\varepsilon - 2\varepsilon^2 \ln n/233)$

… e tudo funciona p/ escolha de $N(d,\varepsilon)$!

A prova em retrospecto

- Subespaço $P = \{Rx : x \in P_0\}$ escolhido ao acaso.
- "Funcionar": $\|Rx\|_K \approx m_K$ para todo $|x|=1$ em P_0.
- Funciona para cada elto. da δ-rede (finita) $\Rightarrow$ funciona para todos.
- $\forall\ x \in \delta$-rede, concentração$\Rightarrow$ não funciona com prob. pequena.
- Pr[falha]$\leq$ Pr[individual] (# δ rede)

Resultados mais recentes

- Muitos problemas em Análise, Geometria e combinatória têm solução probabilística.
  - O problema de Whitney em espaços métricos: extensão de funções Lipschitz. (Lee – Naor)

Resultados mais recentes

- $\forall$ matriz A n x n $\forall$ $\delta>0$
  $\exists$ projeção P de posto $c(\delta)n$
  tal que os valores singulares de PAP estão entre:

  $\delta \, Tr(A^tA)^{1/2}$ e $(1/\delta) \, Tr(A^tA)^{1/2}$
  (Borgain-Tzifriri-Talagrand).

Avanços mais recentes

- Estudo de estruturas euclideanas e corpos convexos em dimensão alta é área bastante ativa.
- Aplicações em algoritmos começam a aparecer.

Muito obrigado!