

# O problema de singularidades para as equações de Euler incompressíveis

Helena J. Nussenzveig Lopes

IMECC-UNICAMP

October 10, 2008



Figure: Leonhard Euler

As equações de Euler são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p, & \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ |u(x, t)| \rightarrow 0, & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Acima,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  representa a velocidade do escoamento e  $p$  é a pressão escalar. O termo  $(u \cdot \nabla)u$  é entendido como sendo:

$$\sum_{i=1}^N u_i \partial_{x_i} u_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

“Primeira equação” de (1)  $\rightarrow$  lei de conservação de momento;

“Segunda equação” de (1)  $\rightarrow$  incompressibilidade – campos de divergente nulo preservam volume.

As equações de Euler são modelo para uma grande variedade de escoamentos, desde os mais suaves, laminares/potenciais, até escoamentos turbulentos.

A seguir vejamos alguns exemplos de escoamentos que são modelados pelo sistema de Euler.

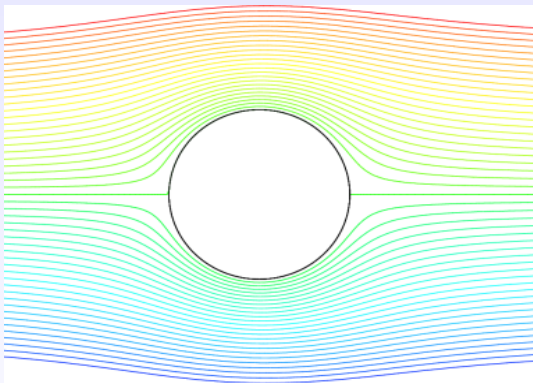


Figure: Escoamento ao redor de um cilindro.

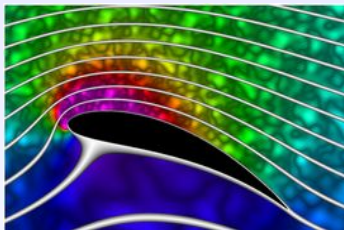


Figure: Escoamento ao redor de um aerofólio



Figure: Instabilidade de escoamentos laminares



Figure: Instabilidade de Kelvin-Helmholtz observada em nuvens

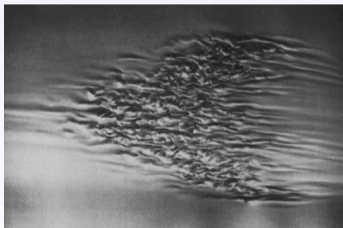


Figure: Mancha turbulenta





Figure: Vórtices na esteira de um avião



**Figure:** Vórtices na grande mancha vermelha de Júpiter



**Figure:** Furacão Elena, Golfo do México, 1985



Figure: Esteira de um barco

Equações de Euler: publicadas em 1757.

Curiosidade: o primeiro artigo de Euler contendo equações de dinâmica dos fluidos incompressível foi *Principia motus fluidorum* (Princípios dos movimentos de fluidos), escrito em 1752. Contudo, havia um erro (também feito por d'Alembert): tratava apenas escoamentos potenciais.

Em 1755 Euler submeteu outro trabalho, *Principes généraux du mouvement des fluides* (Leis gerais do movimento de fluidos), publicado em 1757. O primeiro trabalho só foi publicado em 1761.

HISTOIRE  
DE  
L'ACADEMIE ROYALE  
DES  
SCIENCES  
ET  
BELLES LETTRES.

ANNEE MDCCLV.



A BERLIN,  
CHEZ HAUDE ET SPENER,  
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.  
MDCCLVII.

## PRINCIPES GÉNÉRAUX DU MOUVEMENT DES FLUIDES:

PAR M. EULER.

### I.

Ayant établi dans mon Mémoire précédent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverse qualité des fluides, que des forces qui y puissent agir; je me propose de traiter sur le même pied le mouvement des fluides, & de rechercher les principes généraux, sur lesquels toute la science du mouvement des fluides est fondée. On comprend aisément que cette matière est beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes: cependant j'espère d'en venir aussi heureusement à bout, de sorte que s'il y reste des difficultés, ce ne sera pas du côté du mécanisme, mais uniquement du côté de l'analytique: cette science n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui seroit nécessaire pour développer les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puisse déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il se trouve, & par quelques forces qu'il soit sollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui constituent le sujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide est supposée connue, dont il faut considérer les diverses espèces: le fluide est donc, ou incompressible, ou compressible. S'il n'est pas susceptible de compression, il faut distinguer deux cas, l'un où toute la masse est composée de parties homogènes, dont la densité est partout & demeure toujours la même, l'autre

Primeiro parágrafo da página anterior, Euler diz (traduzindo):

“se restarem dificuldades, não será do lado da mecânica, mas unicamente do lado da análise: esta ciência não tendo atingido o grau de perfeição necessária para desenvolver fórmulas analíticas . . . para o movimento dos fluidos.”



Caso de dimensão 3.

Suponha  $u_0 \in H^m(\mathbb{R}^3)$ ,  $\operatorname{div} u_0 = 0$ . Aqui,  $H^m$  é o espaço de funções de quadrado integrável e cujas “derivadas fracas” até ordem  $m$  são de quadrado integrável.

## Theorem

*(Kato, 1972) Se  $m \geq [\frac{3}{2}] + 2$  então, para algum  $T > 0$ , existe uma única solução  $u \in C([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T]; C(\mathbb{R}^3))$  das equações de Euler.*

Em dimensão 2 temos  $T = \infty$ .

Seja  $T_{max}$  o maior tempo até o qual a solução das equações de Euler permanece suave.

O problema de singularidades para Euler é determinar se, em dimensão 3,  $T_{max} = \infty$  ou  $T_{max} < \infty$ .

As equações de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ |u(x, t)| \rightarrow 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ \text{em } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ \text{quando } |x| \rightarrow \infty, t > 0 \\ \text{em } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{array} \quad (2)$$

Acima,  $\nu > 0$  é a viscosidade, um parâmetro adimensional dado por

$$\nu = \frac{1}{Re},$$

e  $Re$  é o número de Reynolds.

O número de Reynolds  $Re$  é dado por

$$Re = \frac{UL}{\mu},$$

onde  $U$  é uma velocidade (rapidez) característica,  $L$  é uma escala de comprimento e  $\mu$  é a viscosidade “real”, propriedade física do fluido.

Princípio de similaridade: escoamentos com o mesmo número de Reynolds se comportam de modo similar.

No espaço todo as soluções das equações de Navier-Stokes convergem, quando  $Re \rightarrow \infty$ , para soluções das equações de Euler, (*limite invíscido*).

Teorema de existência para Euler vale também para Navier-Stokes.

Diferença com Euler: existe *solução fraca* de Navier-Stokes globalmente no tempo (Leray, 1930). Unicidade de solução fraca é um problema em aberto.

Um dos 7 *Problemas do Milênio* do Instituto Clay, valendo US\$  $10^6$ , é precisamente o problema de singularidades para as equações de Navier-Stokes.

Os dois problemas de singularidade estão intimamente relacionados.

2007: reunião científica para celebrar os 250 anos da publicação das equações de Euler (*Euler equations: 250 years on*).

Houve sessão de discussão sobre o Problema de Singularidades; alguns dias antes realizou-se pesquisa de opinião. O resultado foi:

Actually, the topic of Euler blow up is intimately connected with the problem of singularities in the Navier–Stokes equations, which is one of the famous Millennium Prize problems of the Clay Mathematics Institute. During the EE250 conference an informal poll among the participants on the problem of finite-time singularities was conducted by C. Bardos and E.S. Titi. The question was: how confident are you, on a 0–10 scale, that solutions to the Euler (Navier–Stokes) equations can develop finite-time singularities? The results are given in the following table.

<i>Response</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>Tot.</i>
<i># of votes (Euler)</i>	<b>8</b>	2	2	4	2	<b>9</b>	0	3	3	3	<b>7</b>	43
<i># of votes (N.-S.)</i>	<b>20</b>	8	4	0	1	<b>5</b>	0	1	0	0	2	41

Highest peaks are marked in bold.

Figure: Singularidades: Euler  $\times$  Navier-Stokes

É evidente que ninguém tem um bom palpite do que ocorre com Euler!

# Qual é a natureza da dificuldade?

Vamos introduzir a vorticidade:

$$\omega = \text{rot } u.$$

Equação de evolução de vorticidade:

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) u (= Du\omega), \quad (3)$$

acoplada à relação entre o campo de divergente nulo  $u$  e  $\omega = \text{rot } u$ .

Em dimensão 2, o lado direito se anula  $\rightarrow$  a vorticidade é *transportada*.



Considerando que:

- $Du$  e  $\omega$  são termos de *mesma ordem de regularidade* ( $Du$  é operador integral singular, traço nulo, ordem 0, em termos de  $\omega$ )
- Ao longo de trajetórias do campo de velocidades o lado direito nada mais é que uma derivada temporal,

parece razoável supor que a vorticidade se comporte do mesmo modo que as soluções de uma equação do tipo

$$\dot{W} = W^2. \quad (4)$$

Isto quer dizer formação de singularidades em tempo finito!

# Uma dificuldade importante: *não-localidade*

Contudo, a vida nem sempre é local...!!!

Formulação velocidade:  $\rightarrow$  para evoluir pressão é necessário resolver

$$-\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{div} (u \otimes u),$$

para cada instante  $t > 0$ .

Formulação vorticidade:  $\rightarrow u = K[\omega]$ ,  $K = \operatorname{rot} (-\Delta)^{-1}$ .

# Modelos não-locais para a equação de vorticidade

Modelo unidimensional para equação de vorticidade (“*baby vorticity equation*”):

$$\partial_t \omega = \mathcal{H}(\omega)\omega, \quad (5)$$

onde  $\mathcal{H}(\omega)$  é a *transformada de Hilbert* de  $\omega$ ,

$$\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)(x, t) = \frac{1}{\pi} VP \int \frac{\omega(y, t)}{x - y} dy,$$

com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .

A integral *VP* (valor principal) é um limite simétrico em torno da singularidade.

## Theorem

(Constantin-Lax-Majda, 1985) Suponha  $\omega_0 = \omega(\cdot, 0) \in H^1(\mathbb{R})$ .  
Assuma também que

$$\{x \mid \mathcal{H}(\omega_0) > 0\} \neq \emptyset.$$

Seja  $\omega = \omega(x, t)$  a solução da “baby vorticity”. Então existe  $T > 0$  tal que  $\omega(x, t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow T$ .

É fácil produzir exemplos de tais  $\omega_0$ .

Versão viscosa: adicione  $\nu \partial_x^2 \omega$  do lado direito da “baby vorticity”. Então as soluções desta versão viscosa também formam singularidades em tempo finito (Schochet, 1986).

Modelo em dimensão 2 – dinâmica de contorno.

Considere um “patch” de vorticidade em dimensão 2:

$\omega = \omega(x, t) = \chi_{\mathcal{D}(t)}$ , onde  $\mathcal{D}(t)$  é um *domínio material* (se move com o escoamento).

Descrição da fronteira do “patch”:  $z = z(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Equação de evolução do *contorno* do “patch”,  $\partial\mathcal{D}(t)$ :

$$\frac{dz}{dt}(\alpha, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z(\alpha, t) - z(\alpha', t)| z_\alpha(\alpha', t) d\alpha'. \quad (6)$$

Após alguns cálculos,

$$\frac{dz_\alpha}{dt}(\alpha, t) = \mathcal{V}(z_\alpha)z_\alpha, \quad (7)$$

onde

$$\mathcal{V}(z_\alpha) = -\frac{1}{2\pi} VP \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} z_\alpha(\alpha', t) \otimes \frac{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)}{|z(\alpha, t) - z(\alpha', t)|^2} d\alpha'.$$

O operador  $\mathcal{V}$  é *operador integral singular*, traço nulo, ordem 0. Novamente, “se parece” com a equação de vorticidade.

Formam-se singularidades no contorno em tempo finito?

## Theorem

*(Chemin, 1993) Assume que  $\partial\mathcal{D}_0 \in C^{1,\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Então  $\partial\mathcal{D}(t) \in C^{1,\gamma}$ , para todo  $t \geq 0$ .*

*Mais ainda, a curvatura e o comprimento do contorno são estimáveis por uma exponencial dupla  $\exp(\exp t)$ .*

Isso mostra que a vida não é tão simples! (Nem tudo que parece a equação de vorticidade forma singularidades.)

Outros modelos: equação quase-geostrófica,

$$\partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = 0, \quad u = \nabla^\perp (-\Delta)^{-1/2} (-\theta). \quad (8)$$

Acima,  $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ .

Derivando, obtemos

$$\partial_t \nabla^\perp \theta + (u \cdot \nabla) \nabla^\perp \theta = Du \nabla^\perp \theta, \quad (9)$$

logo  $\nabla^\perp \theta$  faz o papel da vorticidade.

Caso dissipativo: adicione  $\nu(-\Delta)^\alpha$  ao lado *esquerdo* de (8),  $\alpha \geq 0$ . Caso crítico:  $\alpha = 1/2$ . *Recentemente* Kiselev *et alli* e Caffarelli *et alli* mostraram (2007) que não há formação de singularidades em tempo finito *para o caso crítico* dissipativo.

Em aberto: sem dissipação.



# Critérios para o problema de singularidades

## Theorem

(Beale, Kato, Majda, 1984)

- Se  $\int_0^T \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds$  for limitada, como função de  $T$ , então não há formação de singularidades para Euler (ou Navier-Stokes);
- Se Euler (ou Navier-Stokes) formar singularidades em tempo  $T$  então  $\int_0^t \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds \rightarrow \infty$  quando  $t \nearrow T$ .

O critério BKM é muito valioso em simulações numéricas.

Outro critério: direção de vorticidade  $\xi \equiv \omega/|\omega|$ . Enquanto

$$\int_0^T \|D\xi(\cdot, s)\|_{L^\infty}^2 ds$$

for limitada não há formação de singularidades (Constantin, Fefferman, Majda, 1996).

# Conclusões a partir de simulações numéricas – histórico elaborado por R. Kerr.

CSCAMM: Challenges of Incompressible at High Re

## HISTORY OF EULER

Method, then YES or NO on singularity

- 1975 Early Taylor-Green. Inconclusive.
- 1979 Pade of Taylor-Green. Yes
- 1983 DNS of Taylor-Green for Euler No
- 1984 Beale-Kato-Majda. Bounds for Euler
- 1986 Chorin/Siggia. Vortex filaments. Yes
- DNS = Direct numerical simulation
  - 1987 Early: NO too much flattening
  - 1989 Spectral: YES too crude
  - 1990 Nested DNS: NO bad numerics
  - 1993 Filtered initial conditions: YES  $\|\omega\|_\infty \approx 18/(T-t)$
  - 1998 Cylindrical vortex [Grauer *et al.*(1998)] YES with  $\|\omega\|_\infty \approx 18/(T-t)$
  - 2006 Hou and Li, filtered spectral: NO
  - 2006 Orlandi and Carnevale, new claims of singular behavior with unresolved problems

A situação atual (2008!): discussão polarizada Hou versus Kerr.

Hou *et alli* deduziram critério fino, localizado próximo do máximo de vorticidade, ao longo de curvas integrais de vorticidade.

Kerr *et alli* produziram simulações numéricas que sugerem formação de singularidades, em torno de  $t = 18$ .

Hou e Kerr estão refinando as simulações para verificar se satisfazem ou não o critério de Hou.

Hou  $\rightarrow$  SIM, há “dynamic nonlinearity depletion” (desaparecimento dinâmico do efeito não-linear) em regiões de alta vorticidade.

Kerr  $\rightarrow$  NÃO. Novas simulações indicam que a estimativa do instante de formação de singularidade estava errada – o instante é posterior.

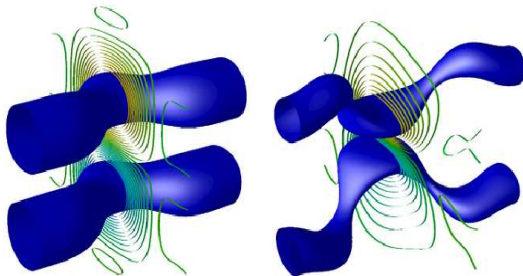


Figure 3: The 3D view of the vortex tube for  $t = 0$  and  $t = 6$ . The tube is the isosurface at 60% of the maximum vorticity. The ribbons on the symmetry plane are the contours at other different values.

**Figure:** Figura retirada de artigo de Hou e Li, 2006

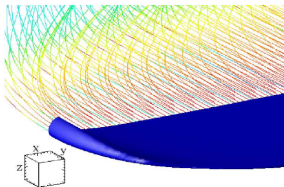


Figure 24: The local 3D vortex structure and vortex lines around the maximum vorticity at  $t = 17$ . The size of the box on the left is  $0.075^3$  to demonstrate the scale of the picture. The isosurface is set at  $0.6 \times \|\bar{\omega}\|_{\infty}$ .

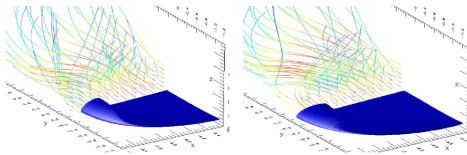
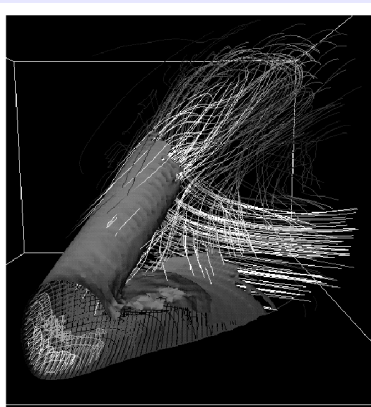


Figure 25: The local 3D vortex structures and vortex lines around the maximum vorticity at  $t = 18$  (on the left) and  $t = 19$  (on the right). The isosurface is set at  $0.5 \times \|\bar{\omega}\|_{\infty}$ .

**Figure:** Outra figura retirada de artigo de Hou e Li, 2006, em torno de  $t = 18$



The dominant feature is an isosurface set at  $0.6\|\omega\|_\infty$  indicating the region out to  $R$ , the extent of the intermediate region. Beyond the isosurface is an outer region indicated by swirling vortex lines that originate from within the surface.

Three-dimensional visualization of the singular collapse of anti-parallel vortex tubes in the incompressible Euler equations at  $t = 17$ . One half of one of the anti-parallel vortices, cut through the symmetry plane of maximum vorticity with  $z$  expanded by 4 is shown. This is a black and white version of the 1996 color cover figure of Nonlinearity [51]. Three visualization procedures are used: mesh lines with shading, an isosurface, and vortex lines. This illustrates how the physical space structure can be divided into three regions, inner, intermediate, and outer by the length scales  $R \sim (T_c - t)^{1/2}$  and  $\rho \sim (T_c - t)$ . The inner region within a distance  $\rho \sim (T_c - t)$  of  $\|\omega\|_\infty$  is visualized with bright lines.  $\|\omega\|_\infty$

Figure: Figura retirada de artigo de Kerr, 1996, em torno de  $t = 18$

# Conclusões e conexões

- O problema de singularidades para Euler é importante, atual e está muito aberto.
- As ferramentas de análise usadas são modernas e sofisticadas: análise harmônica (operadores integrais singulares, decomposição de Littlewood-Paley, “wavelets”, etc), análise funcional (espaços de funções), análise microlocal (cálculo paradiferencial, etc).
- Esta área depende, de modo não-trivial, de sinergia entre análise, experimentos e simulações numéricas, na melhor tradição de matemática aplicada.
- Uma resposta definitiva ajudará a compreender vários outros problemas importantes de mecânica dos fluidos, tais como transição para turbulência, modelagem de escoamentos turbulentos e dissipação de energia, etc.
- Em resumo, trata-se de uma área rica em problemas, interdisciplinar e extremamente ativa.